



CHAMPS & PARTICULES

ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

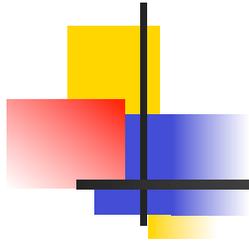


Alain Bouquet

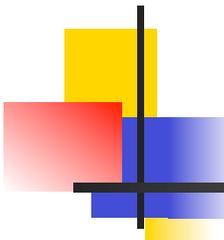
Laboratoire AstroParticule & Cosmologie

Université Denis Diderot Paris 7, CNRS, Observatoire de Paris & CEA



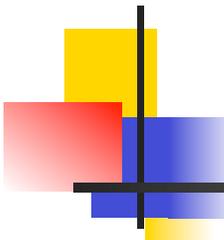


THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS



Pourquoi une théorie quantique des champs ?

- Le nombre de particules dans un système quantique n'est en général pas conservé
 - ➔ extension requise de la mécanique quantique à un **nombre variable de particules**
 - ➔ nombre potentiellement infini ➔ dans tous l'espace ➔ **champ**
- Champ = quantité ψ définie en tout point de l'espace et du temps ➔ $\psi(x,t)$
 - particules i ➔ nombre fini de degrés de liberté ➔ nombre fini d'opérateurs X_i et P_i
 - champ ➔ nombre infini de degrés de liberté ➔ champ d'**opérateurs** $\psi(x,t)$
 - décomposables en sommes d'opérateurs de création-annihilation de quanta
 - au point $X=(x,t)$
 - ou d'impulsion-énergie $P=(p,E)$
- Longueur de Compton $L_C = \hbar/mc = 1/m$ pour des quanta de masse m
 - ➔ taille maximale où cela a un sens de parler *d'une seule particule*
 - $L \ll L_C \Leftrightarrow$ énergie $E \gg mc^2$
 - ➔ possibilité de produire de nouvelles (paires de) particules
 - ➔ nombre variable de particules



De la mécanique quantique à la théorie quantique des champs

Théorie à **un** quanton

- libre
- ou en interaction avec un champ extérieur
- ex: oscillateur harmonique, Schrödinger, Pauli, Dirac et l'atome d'hydrogène



Théorie à **n** quantons

- libres
- ou en interaction entre eux
- ou avec un champ extérieur
- ex: physique atomique, moléculaire, physique du solide



Théorie à un nombre **variable** de quantons

- libres
- ou en interaction entre eux
- ou avec un champ extérieur
- ➔ existence d'un vide (état sans quanton)
- ➔ existence d'opérateurs de création et d'annihilation
- ex: théorie de Dirac du rayonnement, théorie de Fermi de l'interaction faible, théorie de Yukawa de l'interaction forte, théories de jauge

Lagrangiens

- Une théorie (quantique) des champs est définie par un lagrangien $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$
- qui est une fonction des champs φ et de leurs dérivées spatio-temporelles $\partial_\mu \varphi$
- avec deux parties : champs libres (\sim énergie cinétique) et interactions (\sim énergie potentielle)
- Champ de spin 0 (scalaire)

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mu \varphi^3 + \lambda \varphi^4$$

interaction à 3 quantons ↗

↖ interaction à 4 quantons

- Champ de spin $\frac{1}{2}$

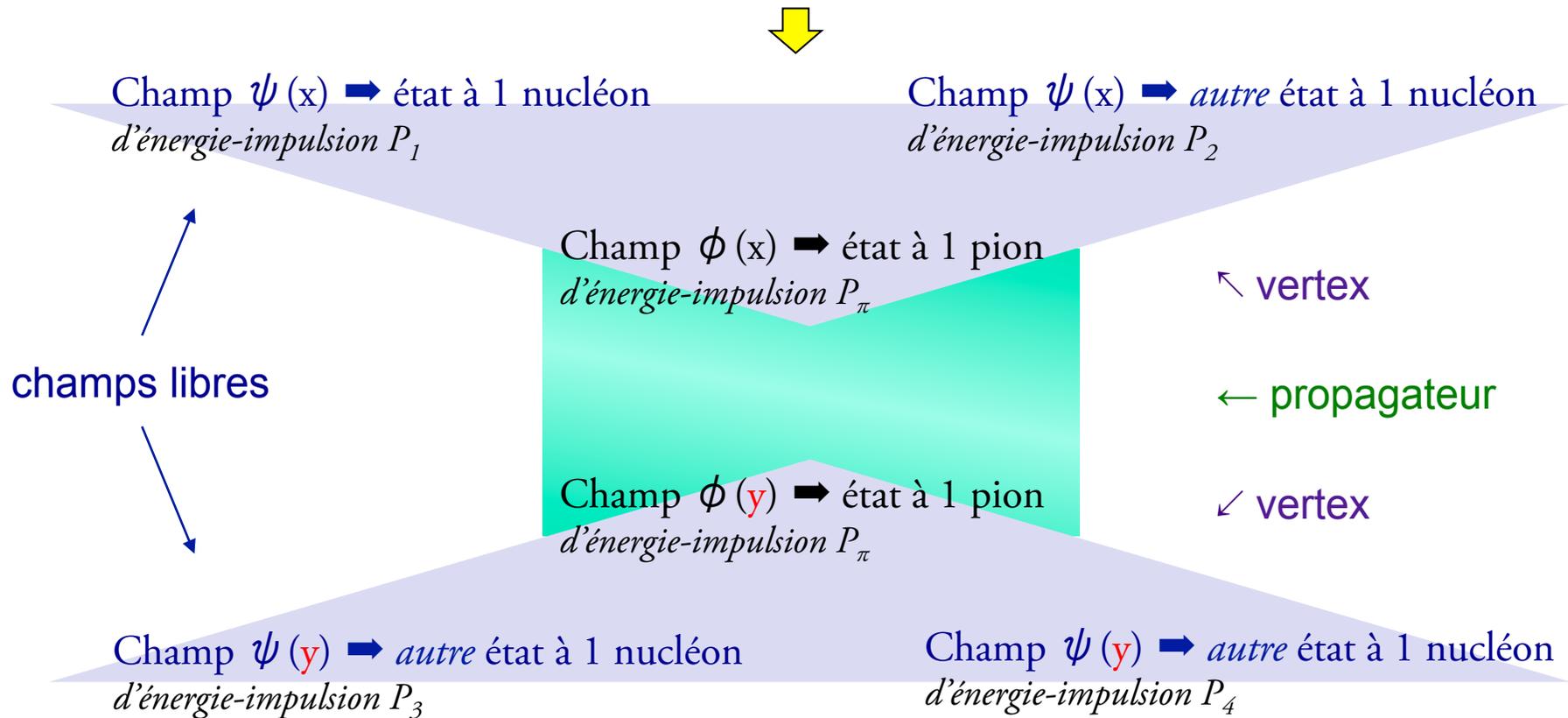
$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \psi^* i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \psi^* \psi - e \psi^* \gamma_\mu A_\mu \psi + G \psi^* O \psi \psi^* O \psi$$

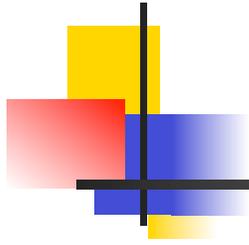
interaction électromagnétique ↗

↖ interaction de Fermi

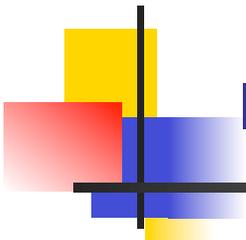
Interactions

- Très schématiquement : interaction nucléon-nucléon par échange d'un pion
- Couplage $\psi \psi \phi$ des trois champs au point d'espace-temps x





PERTURBATIONS



Interactions et développement perturbatif

- Lagrangien \Rightarrow hamiltonien \Rightarrow équations du mouvement (Klein-Gordon, Dirac, Maxwell)
- \Rightarrow hamiltonien = hamiltonien libre H_0 + hamiltonien d'interaction H_I
- On ne sait traiter que le cas où l'interaction entre champs est assez faible pour que les champs se comportent *en première approximation* comme des champs libres
 - \Rightarrow ceux-ci sont calculés à partir de l'hamiltonien libre
 - \Rightarrow états à 1, 2... n quantons d'énergie impulsion P_1, P_2, \dots, P_n (ou de positions x_1, \dots)
 - \Rightarrow puis on calcule les corrections successives dues aux interactions
- \Rightarrow développement en série de puissances du couplage g

$$F(p) = F_0(p) + g F_1(p) + g^2 F_2(p) + \dots + g^n F_n(p) + \dots$$

- F étant une quantité mesurable quelconque (charge, amplitude de diffusion...) et p les impulsions (ou les positions) initiales et finales
- Risques potentiels
 - un ou plusieurs termes de la série sont infinis \Rightarrow la série n'a pas de sens
 - les termes de la série divergent ($g > 1$ par ex.) \Rightarrow la série n'a pas de sens
 - la série ne converge pas vers une valeur finie \Rightarrow la série n'a pas de sens

Développement de Dyson

- Rappel de mécanique quantique

- hamiltonien $H = H_0 + H_I$
- on sait résoudre l'équation de Schrödinger pour H_0 , mais pas pour $H_0 + H_I$
- ➔ **représentation d'interaction** où les opérateurs évoluent avec H_0 et les états $|\psi_I\rangle$ avec H_I
- ➔ équation d'évolution pour $|\psi_I(t)\rangle$ Éq. de Schrödinger Tomonaga-Schwinger

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I |\psi_I(t)\rangle$$

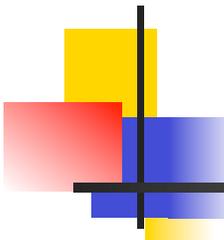
- mais est-on plus avancé ?

- Un peu quand même :

- $|\psi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad \rightarrow \quad i \hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle = H_I(t) U(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle$

$$U(t, t_0) = 1 - i\hbar \int_{t_0}^t H_I(t_1) U(t_1, t_0) dt_1 = 1 - i\hbar \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 - \hbar^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots$$

- ➔ développement perturbatif (attention: ce sont des opérateurs, **ordonnés en temps**)



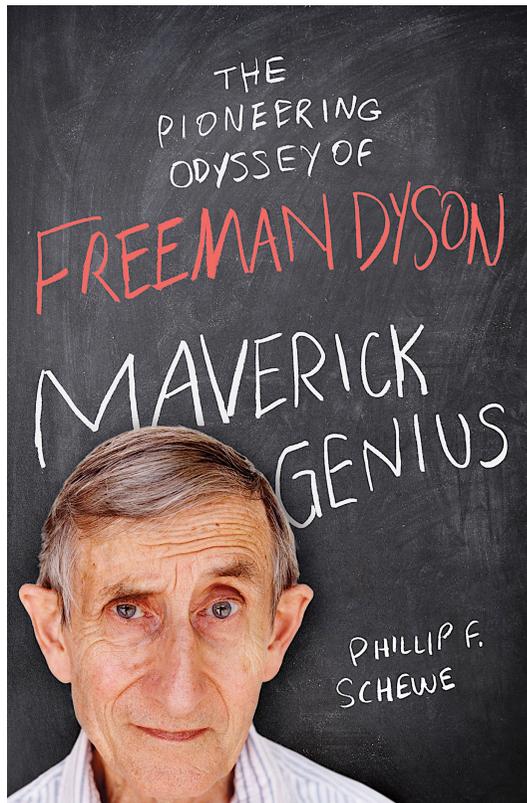
Les combattants de l'infini

- Termes du premier ordre pour l'électrodynamique quantique
 - diffusion Compton (Klein et Nishina 1927)
 - annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma \gamma$ (Dirac 1930)
 - Bremsstrahlung $e^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$ (Bethe et Heitler 1934)
 - diffusion Bahba $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ (Bahba 1935)

} excellent accord avec les observations
- **Mais : termes du deuxième ordre ➔ infinis**
- ➔ période de flottement
- 1949 : Tomonaga et Schwinger (indépendamment) calculèrent les termes suivants de la série en compensant des infinis entre eux (**renormalisation**) sur une idée de Bethe
- 1949 : Feynman parvint au même résultat par la technique des **diagrammes**
- 1949 : Dyson démontra l'équivalence des approches, et les généralisa
- ➔ prix Nobel de physique 1965 partagé entre Tomonaga, Schwinger et Feynman

Freeman Dyson (1923-)

- 1949 : démonstration de l'équivalence des méthodes de Feynman et de Schwinger et Tomonaga



- Professeur à l'Institute of Advanced Studies (Princeton) de 1953 à 1994
- Travaux sur
 - la théorie des nombres et les matrices aléatoires
 - la propulsion nucléaire des fusées (projet *Orion*) de 1957 à 1961
 - avec Teller, un petit réacteur nucléaire sûr (*TRIGA*) construit en petite série (70 ex.) de 1958 à maintenant (avec *Areva*)
 - la *sphère de Dyson* en 1960
 - la démonstration en 1966 que la stabilité de la matière est bien une conséquence du principe d'exclusion de Pauli (et non de la répulsion électrostatique des électrons périphériques)
 - le climat et l'énergie à partir de 1970 avec Alvin Weinberg

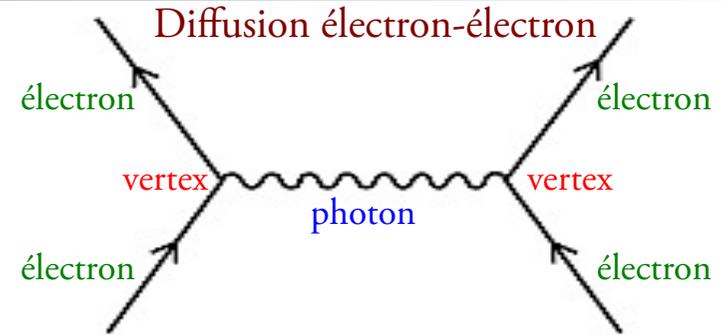
Diagrammes de Feynman



- Série de Dyson :
 - somme d'intégrales multiples
 - de produits d'opérateurs hamiltoniens
 - ordonnés dans le temps (↔ invariance relativiste pas évidente)
 - dont chacun est un produit de champs d'opérateurs
 - eux-mêmes somme d'opérateurs de création et d'annihilation
- Le résultat d'un processus physique donné est la valeur moyenne entre états initial et final de la somme de la série
- Chaque terme du développement en série est donc le produit d'opérateurs précis, pris en un point particulier de l'espace-temps (ou pour une valeur particulière de l'énergie-impulsion)
- Feynman remarqua que chacun d'eux pouvait se représenter par des symboles graphiques
- que l'on devait assembler selon des règles précises

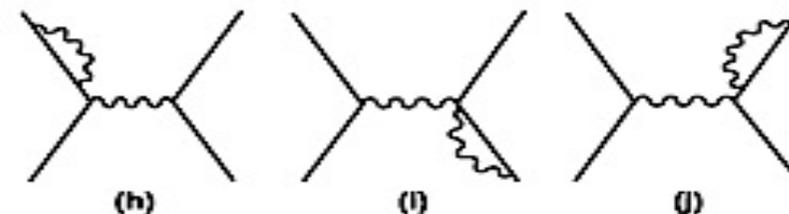
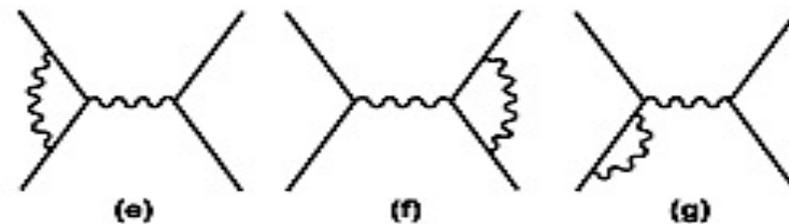
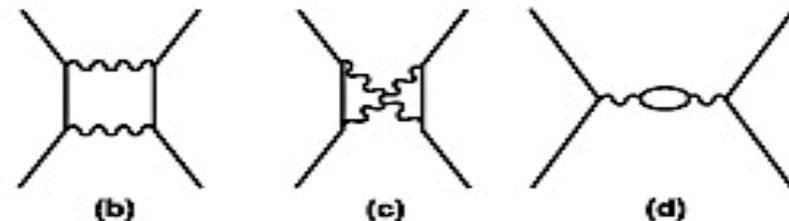
Diagrammes de Feynman

- Règles de construction simples
 - chaque particule externe (entrante ou sortante) est représentée par une ligne
 - chaque interaction est représentée par un vertex
 - chaque particule interne est représentée par une ligne partant *et* aboutissant à un vertex (propagateur)
 - pour un processus donné, les particules externes sont fixées, et **on trace tous les diagrammes possibles** ayant un nombre quelconque de vertex et de propagateurs
 - seule importe la **topologie** du diagramme
 - *NB: Gell-Mann a toujours parlé des diagrammes de Stueckelberg (qui avait utilisé une notation graphique similaire une décennie auparavant)*



(a)

Deuxième ordre



Diagrammes de Feynman

- Règles de calcul simples

- à chaque particule externe est attribué l'état libre ayant l'impulsion donnée
- à chaque vertex est attribué le **terme d'interaction** correspondant du lagrangien
- à chaque propagateur est attribué (l'inverse du) **terme libre** du lagrangien

- Champ de spin 0 (scalaire)

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \boxed{\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2} + \mu \varphi^3 + \lambda \varphi^4$$

⇒ propagateur $1/(P^2 + m^2)$

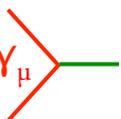
⇒ vertex μ 

⇒ vertex λ 

- Champ de spin $\frac{1}{2}$

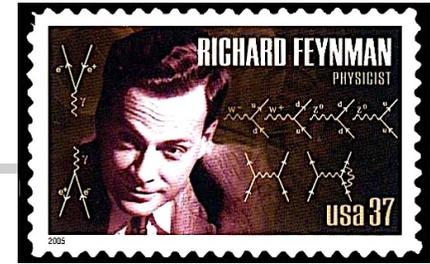
$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \psi^* i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \psi^* \psi - e \psi^* \gamma_\mu A_\mu \psi + G \psi^* O \psi \psi^* O \psi$$

⇒ propagateur $1/(P + m)$

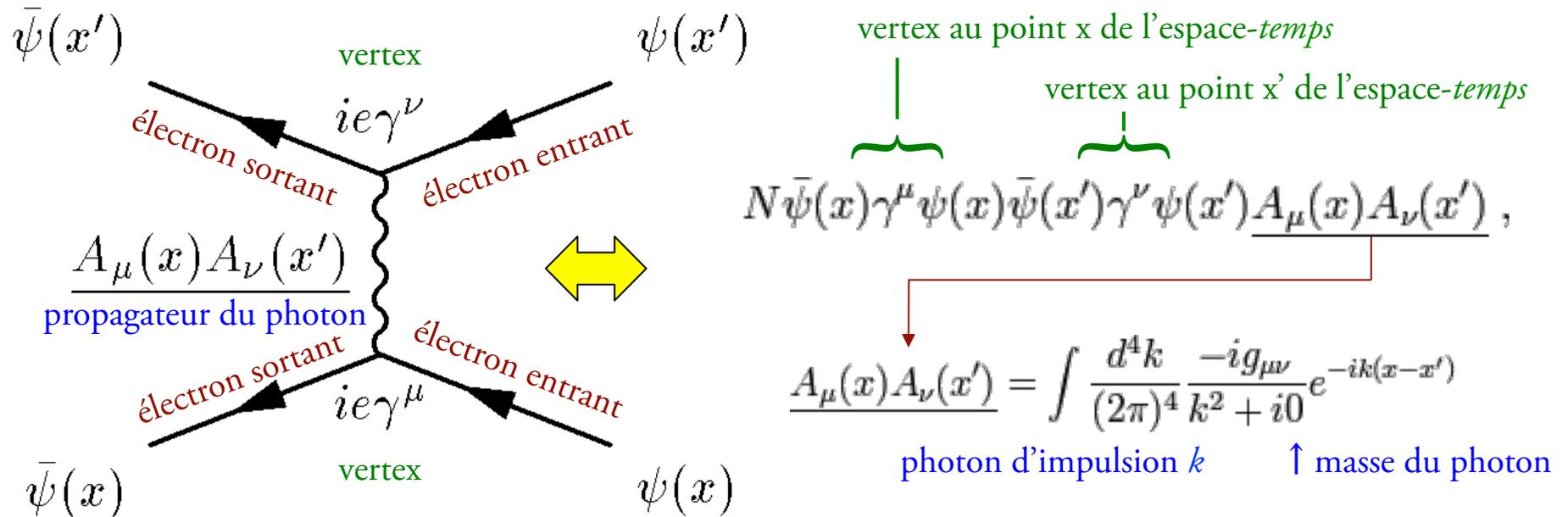
⇒ vertex $e \gamma_\mu$ 

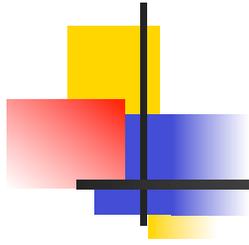
⇒ vertex G 

Diagrammes de Feynman



- Un diagramme de Feynman n'est **pas** un petit dessin
- C'est la traduction graphique d'un terme du développement perturbatif de l'interaction
- Exemple : diffusion $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ au premier ordre

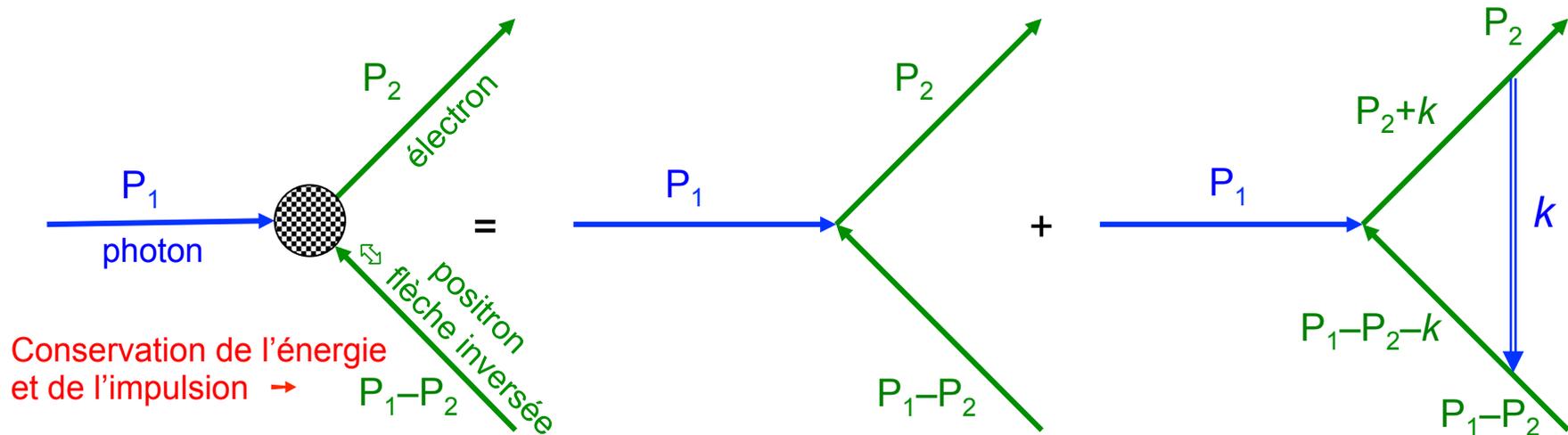




RENORMALISATION

La source des infinis

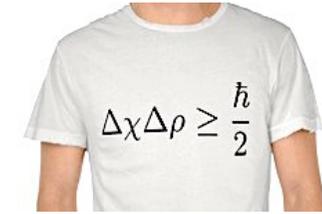
- Les boucles !
- Par exemple : création d'une paire électron-positron par un photon gamma



- La quadri-impulsion k n'est pas déterminée \Rightarrow somme sur **toutes** les valeurs possibles

- Propagateurs $\Rightarrow \int k^3 dk \frac{1}{P_2 + k + m} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{P_1 - P_2 - k + m} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{k} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln(\Lambda)$

La banque de Heisenberg



- Vertex nucléon-nucléon-pion
- Conservation de l'énergie impulsion

$$\Rightarrow P_1 = P_2 + P_\pi$$

- Problème :
 - nucléon initial de masse 940 MeV, au repos (choix toujours possible)



- → pion de masse 140 MeV + énergie cinétique
- et nucléon de masse 940 MeV + énergie cinétique (impulsion de recul)
- ??

- Explication courante

- longueur de Compton $L_C = 1/m$
- + inégalités de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p > \frac{1}{2} \hbar$$

$$\Delta t \cdot \Delta E > \frac{1}{2} \hbar$$

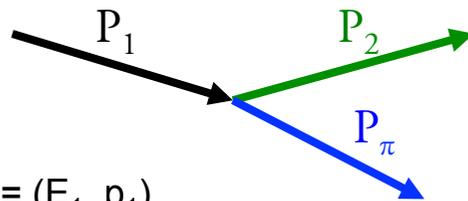
- *incertitude* sur la position de l'interaction
⇔ *indétermination* sur l'impulsion des particules
⇔ *indétermination* sur leur énergie
⇔ *incertitude* sur l'instant d'interaction

$$\Delta x \sim L_C(\pi) = 1/m_\pi \Leftrightarrow \Delta p \sim m_\pi \Leftrightarrow \Delta E \sim m_\pi$$

- ⇔ métaphore fréquente :
- le nucléon « emprunte » à la banque de Heisenberg l'énergie $E \sim m_\pi$ suffisante pour créer un pion
- mais il doit la rendre avant l'échéance
 $\Delta t \sim 1/m_\pi \Leftrightarrow$ le pion ne s'éloigne que de
 $\Delta x \sim 1/m_\pi \sim 10^{-15} \text{ m}$

Hors de la couche de masse

- Invariance du lagrangien par translation spatio-temporelle
- Théorème de Noether \Rightarrow l'énergie et l'impulsion sont **toujours** conservées
- Alors ?
- Vertex nucléon-nucléon-pion

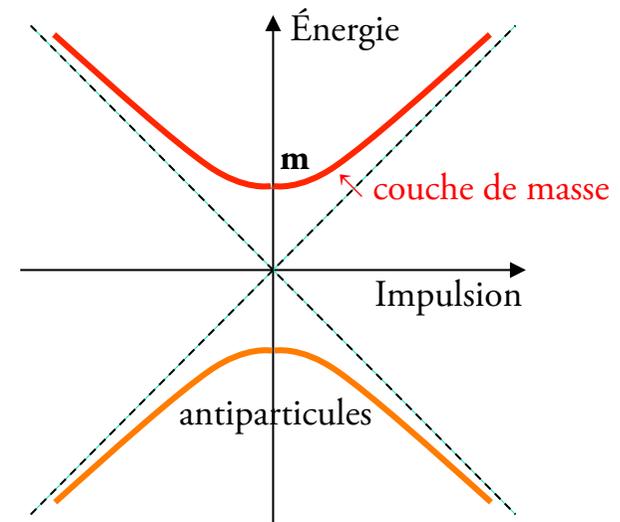


- $P_1 = (E_1, p_1)$
- $P_2 = (E_2, p_2)$
- $P_\pi = (E_\pi, p_\pi)$

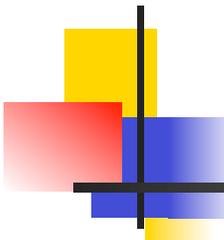
$$P_1 = P_2 + P_\pi$$

- La couche de masse

- particule (quanton) de masse m
- énergie-impulsion $P = (E, p)$
- $\Rightarrow ||P||^2 = E^2 - p^2 = m^2$
- $E = \pm (p^2 + m^2)^{1/2}$



- Impossible si $P_1^2 = P_2^2 = m_N^2$ et $P_\pi^2 = m_\pi^2$ \Rightarrow Pion **virtuel** hors de sa couche de masse $\Leftrightarrow P_\pi^2 \neq m_\pi^2$



Régularisation

- \Leftrightarrow Rendre convergentes les intégrales au moyen d'un « régulateur »
- Puis se débarrasser du régulateur à la fin des calculs
 - \rightarrow résultat désormais fini : tout va bien, les infinis se sont compensés
 - \rightarrow résultat encore infini : tout va mal, la théorie n'est pas utilisable sans **renormalisation**
- **Régulateurs**
- Arrêter toutes les intégrales en quadri-impulsion à une valeur « de coupure » Λ
 - à la fin, on fera $\Lambda \rightarrow \infty$
 - \pm justifié physiquement par l'idée que la théorie examinée cesse d'être valable à très haute énergie \Leftrightarrow très courte distance
- Changer (fictivement !) la dimension de l'espace-temps de 4 à d , et choisir bien sûr d de sorte que les intégrales convergent
 - à la fin, on fera $d \rightarrow 4$
- Et bien d'autres méthodes encore...

Renormalisation

- Exemple: couplage photon-électron-positron, quantité **mesurable** $F(p)$ dépendant *a priori* des impulsions entrantes et sortantes p
- ➔ développement en série de puissances du couplage «nu» g (celui du lagrangien)

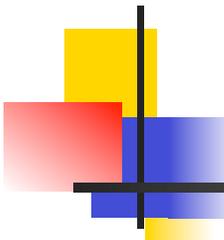
$$F(p) = g + g^2 F_2(p) + \dots + g^n F_n(p) + \dots$$

The diagram shows the expansion of the vertex function $F(p)$. On the left is a vertex with a checkered circle, labeled $F(p)$. This is equal to the sum of diagrams: a tree-level vertex labeled g , plus a one-loop diagram labeled $g^3 F_3(p)$ with a loop of two fermions, plus higher-order terms.

- Régularisation: coupure à $p = \Lambda$

$$\Rightarrow F_{\Lambda}(p) = g + g^2 F_{\Lambda 2}(p) + g^3 F_{\Lambda 3}(p) + \dots + g^n F_{\Lambda n}(p) + \dots$$

- où les termes $F_{\Lambda n}$ divergent en $\text{Log}(\Lambda)$ [ou Λ^D] quand le régulateur $\Lambda \rightarrow \infty$
- *NB: selon la régularisation choisie (coupure, dimensionnelle...) les calculs intermédiaires sont très différents, mais le résultat de la renormalisation est le même*



Renormalisation (suite)

- Le couplage est **expérimentalement mesurable**, pour une impulsion $p=\mu$ par exemple
- Classiquement, on écrirait $F(\mu) = g$ déterminant ainsi le paramètre g du lagrangien
- L'hypothèse de renormalisabilité est que
 - le remplacement $g \rightarrow F(\mu) = g_R$ rend finie la correction
 - ainsi que les corrections suivantes

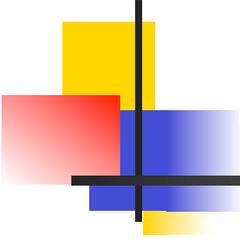
- Partant du développement en série

$$F_{\Lambda}(p, g, \Lambda) = g + g^2 F_{\Lambda_2}(p) + \dots + g^n F_{\Lambda_n}(p) + \dots$$

- on le réécrit en fonction de $F(\mu) = g_R$

$$F_{\Lambda}(p, g_R, \mu, \Lambda) = g_R + g_R^2 [F_{\Lambda_2}(p) - F_{\Lambda_2}(\mu)] + \dots$$

- dans notre exemple $F_2 \propto \int dk/k \rightarrow F_{\Lambda_2} \propto \int dk/k^2 \Rightarrow$ intégrale *convergente* quand $\Lambda \rightarrow \infty$
- et **le deuxième terme est maintenant fini s'il est exprimé en fonction du g_R mesuré**



Renormalisation (suite et fin)

- Au 2° ordre

$$F_{\Lambda}(p, g_R, \mu, \Lambda) = g_R + g_R^2 [F_{\Lambda_2}(p) - F_{\Lambda_2}(\mu)] + \dots$$

- Notons que

- la renormalisation revient à compenser le terme infini $F_{\Lambda_2}(p)$ par un autre terme infini $F_{\Lambda_2}(\mu)$
- le terme infini $F_{\Lambda_2}(p)$ dépend *a priori* de p tandis que $F_{\Lambda_2}(\mu)$ est indépendant de p
- compensation non garantie \rightarrow *toute théorie n'est pas renormalisable*
- renormaliser à l'ordre g_R^2 n'implique pas que les ordres suivants soient aussi finis
- ce n'est pas garanti \rightarrow *toute théorie n'est pas renormalisable*

- Au 3° ordre

$$F_{\Lambda}(p, g_R, \mu, \Lambda) = g_R + g_R^2 [F_{\Lambda_2}(p) - F_{\Lambda_2}(\mu)] + g_R^3 [F_{\Lambda_3}(p) - F_{\Lambda_3}(\mu) - 2F_{\Lambda_2}(\mu)[F_{\Lambda_2}(p) - F_{\Lambda_2}(\mu)]]$$

- Théorie renormalisable :

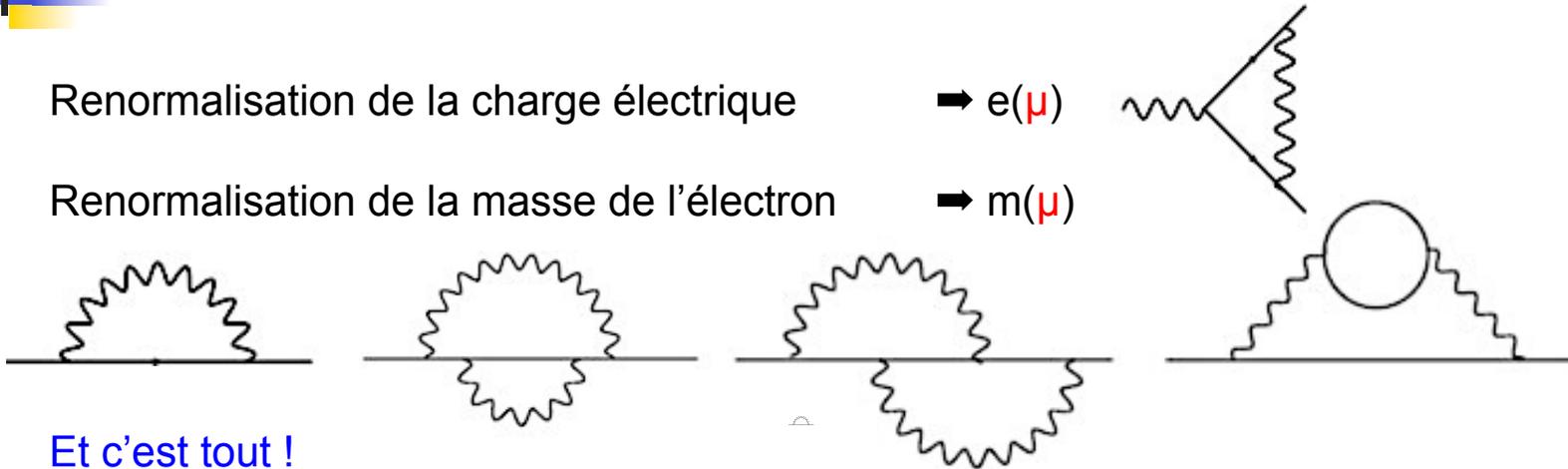
$$F(p, g) \xrightarrow{\text{RÉGULARISATION}} F_{\Lambda}(p, g, \Lambda) \xrightarrow{\text{RENORMALISATION}} F_{\Lambda}(p, g_R, \mu, \Lambda) \xrightarrow{} F(p, g_R, \mu) \text{ fini quand } \Lambda \rightarrow \infty$$

L'opinion de Dirac sur la renormalisation

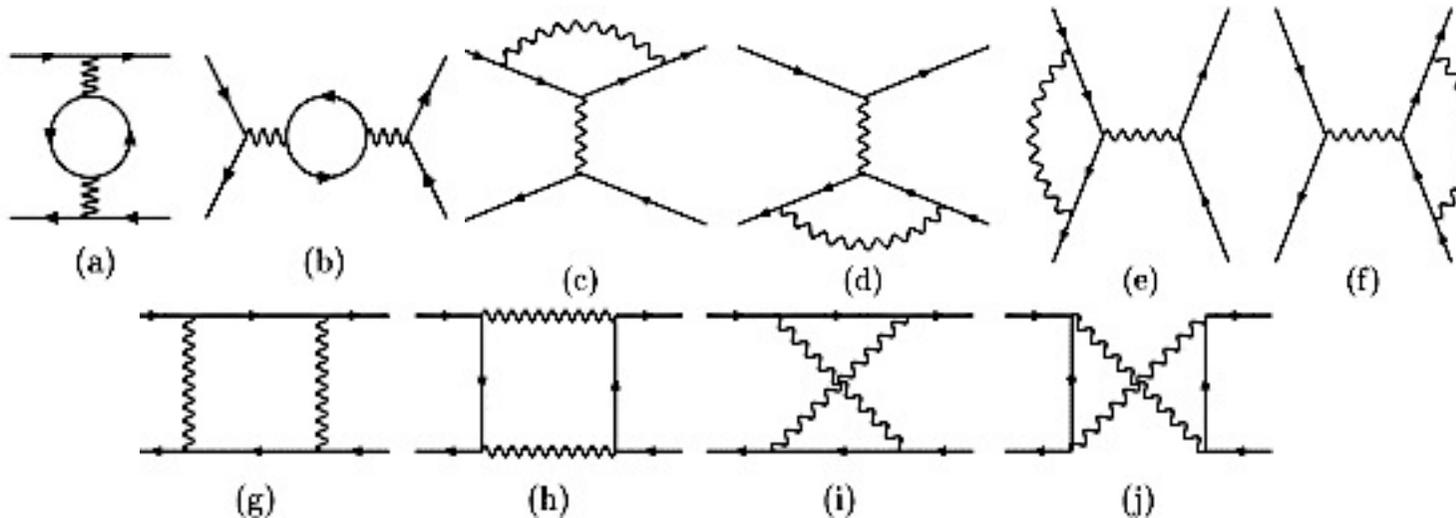


Électrodynamique quantique (QED)

- Renormalisation de la charge électrique $\rightarrow e(\mu)$
- Renormalisation de la masse de l'électron $\rightarrow m(\mu)$



- Et c'est tout !
- Mais les calculs ne sont pas simples pour autant :
 - diagrammes à **une seule** boucle pour la diffusion électron-positron

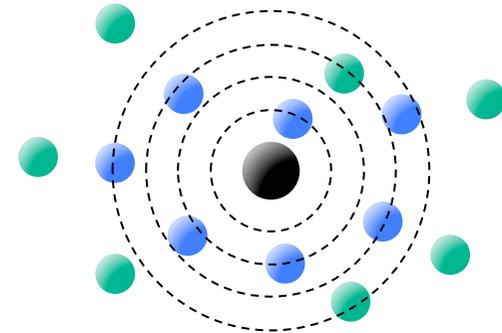


Couplages variant avec l'échelle d'énergie (\Leftrightarrow distance)

- Renormalisation de la charge $e(\mu) \Leftrightarrow$ polarisation du vide
 - la charge de l'électron dépend de l'énergie (\Leftrightarrow distance) à laquelle on la mesure
 - basse énergie (Millikan) $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$
 - haute énergie (LEP) $\alpha = 1/128$

Paires virtuelles électron-positron

- positron \bullet attiré par l'électron central \Rightarrow plus proche
 - électron \bullet repoussé par l'électron central \Rightarrow plus loin
- \Rightarrow la charge apparente augmente près de l'électron



- La renormalisation d'une constante de couplage g conduit à une constante g_R dépendant de l'échelle d'énergie μ à laquelle elle est mesurée

$$g \text{ (et } g_R) \text{ ont une dimension (énergie)}^D \Rightarrow g_R/g \propto (\mu/\Lambda)^D$$

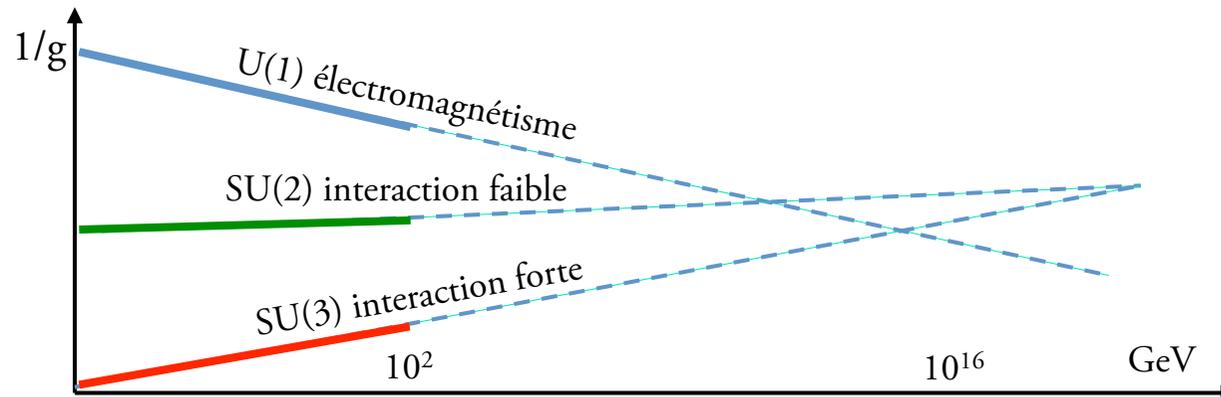
- $D > 0 \Rightarrow$ convergence de la série de perturbations à haute énergie (\Leftrightarrow courte distance). Pour $D = 0 \Rightarrow$ variation *logarithmique* de $g_R(\mu)$
- \Rightarrow la théorie est renormalisable

Quelles théories *peuvent* être renormalisables ?

- ➔ Théories renormalisables \Leftrightarrow constante de couplage de dimension positive ou nulle
- Mais quelle est la dimension des constantes de couplage ?
- Action $S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \psi)$ sans dimension (avec $\hbar = 1$) ➔ \mathcal{L} dimension $1/L^4 = E^4$
- $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mu \varphi^3 + \lambda \varphi^4$
 - ➔ champ scalaire φ de dimension 1 (E^1)
 - ➔ terme m de dimension 1 (heureusement ! $E = mc^2$)
 - ➔ couplage μ de dimension 1 ➔ théories renormalisables 😊
 - ➔ couplage λ de dimension 0
- $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \psi^* i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \psi^* \psi - e \psi^* \gamma_\mu A_\mu \psi + G \psi^* O \psi \psi^* O \psi$
 - ➔ champ spinoriel ψ (fermions) dimension 3/2
 - ➔ terme m de dimension 1
 - ➔ champ vectoriel A_μ (électromagnétisme) dimension 1
 - ➔ couplage électromagnétique e de dimension 0 ➔ théories renormalisables 😊
 - ➔ couplage pion-nucléon de dimension 0
 - ➔ couplage G de Fermi de dimension -2 ($\propto 1/m^2$) ➔ théorie non renormalisable 😞

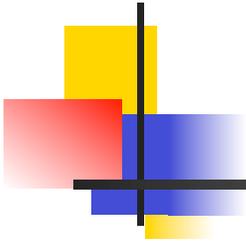
Groupe de renormalisation

- Idée ancienne (Pythagore, Euclide, Galilée) d'invariance par changement d'échelle
- **Groupe** des transformations d'échelle (Stueckelberg et Peterman 1953, Gell-Mann et Low 1954, Bogoliubov et Shirkov 1955)
 - le point μ en énergie où sont mesurées les masses et constantes de couplage est *arbitraire*
 - \rightarrow règle pour passer d'une valeur μ à une valeur μ'
 - \rightarrow équations $\partial g/\partial \mu = \beta(g)$ avec une fonction $\beta(g)$ dépendant de la théorie $\rightarrow g(\mu)$



- Kenneth Wilson 1971 : application à la matière condensée, aux transitions de phase et aux phénomènes critiques (Nobel 1982)
- \rightarrow nouveau point de vue sur le sens physique de la renormalisation





Merci de votre attention !

