CHAMPS & PARTICULES

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Alain Bouquet

Laboratoire AstroParticule & Cosmologie

Université Denis Diderot Paris 7, CNRS, Observatoire de Paris & CEA

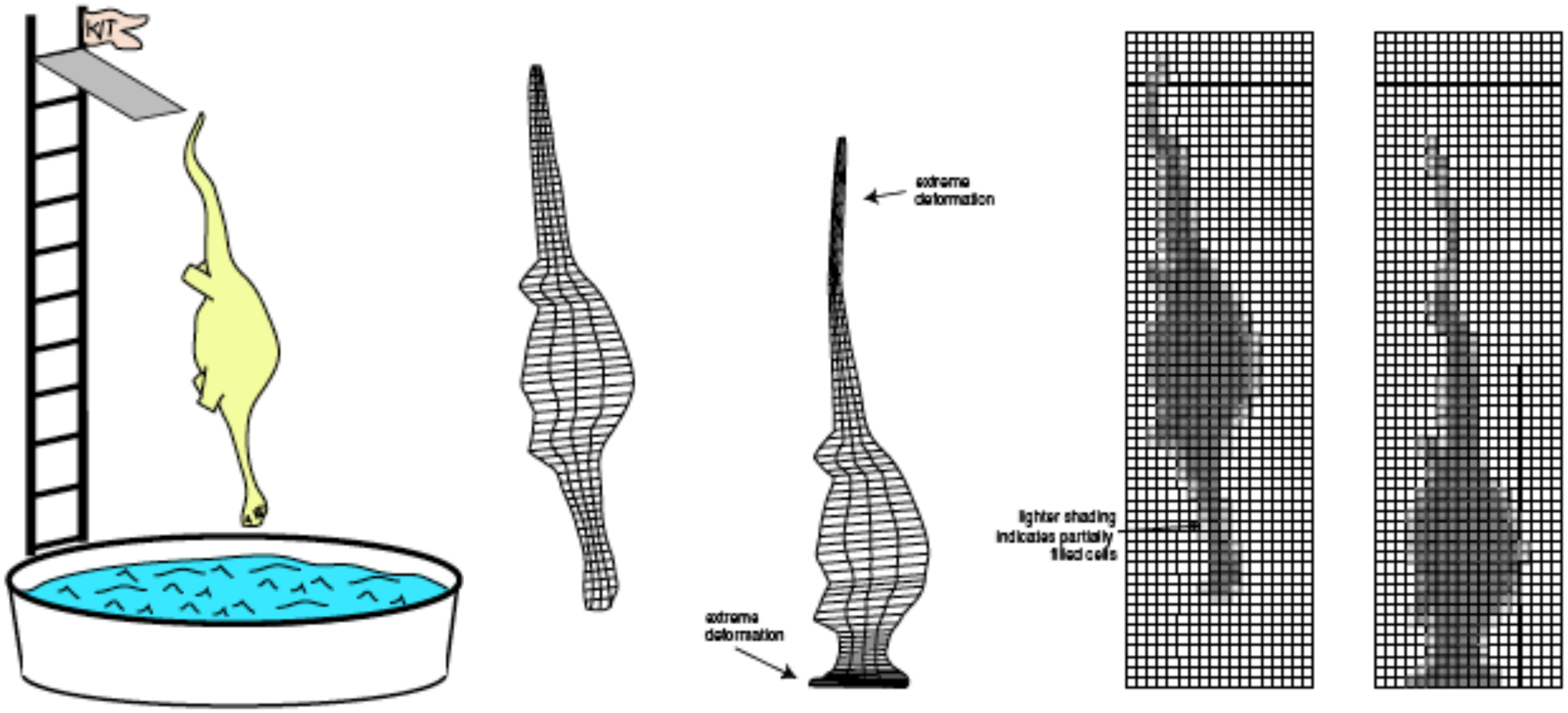
POURQUOI UNE THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS ?

Mécanique quantique *relativiste*

- Mécanique quantique non-relativiste
  - le temps t est un paramètre
  - la position $\mathbf{X}_i$ est un opérateur
- 1° option
  - faire du temps un opérateur **T** ☛ $(\mathbf{T},\mathbf{X}_i) \rightarrow \mathbf{X}_\mu$
  - et généraliser la relation de commutation $[\mathbf{X}_\mu,\mathbf{P}_\mu] = i\hbar$?
  - ⇒ les valeurs propres de l'hamiltonien ne sont pas limitées
  - ⇒ il n'existe pas d'état d'énergie minimale (état fondamental)
  - ⇒ système instable
- 2° option
  - faire de la position un paramètre x_i ☛ $(t,x_i) \rightarrow x_\mu$
  - dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs dépendent du temps
  - ⇒ $\mathbf{O}(t)$ ☛ $\mathbf{O}(x_\mu)$
  - **autrement dit, on a un champ d'opérateurs**
- L'objectif est donc de décrire des particules (discrètes) par des champs (continus)

Analogie hydrodynamique

- Approche lagrangienne
  - on suit le mouvement de « points » matériels ➡ particules
- Approche eulérienne
  - on suit des flux traversant des « cellules » ➡ champs



Faut-il vraiment une théorie quantique des champs ?

- Champ = quantité ψ définie en tout point de l'espace et du temps ➡ $\psi(x,t)$
- Champ électromagnétique ➡ onde électromagnétique ➡ photon
- Électron ➡ fonction d'onde $\psi(x,t)$ ➡ champ « électronique » ?
- Non-conservation expérimentale du nombre de particules (ou de quasi-particules: phonons, magnons, rotons…)
- ➡ extension requise la mécanique quantique pour un nombre variable de particules
- ➡ nombre infini ➡ dans tous l'espace ➡ champ
- Particules *i* ➡ nombre fini de degrés de liberté ➡ nombre fini d'opérateurs **X**i et **P**i
- Champ ➡ nombre infini de degrés de liberté ➡ champ d'opérateurs $\boldsymbol{\psi}(x,t)$
- Toutes les particules du même type (tous les électrons, tous les protons, tous les photons…) sont rigoureusement indiscernables
- ➡ explicable si elles ne sont que des « excitations » du même champ sous-jacent

Quand a-t-on besoin d'une théorie quantique des champs ?

- Mécanique quantique ⇔ constante de Planck $\hbar = h/2\pi$ dim = $M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$
- Relativité d'Einstein ⇔ constante c [vitesse « de la lumière »] dim = $L \cdot T^{-1}$

$$\hbar = 1 \qquad\qquad c = 1$$

- ➡ toutes les quantités se mesurent en unités de masse, ou d'énergie E (ou E^n)
  - ➡ masse = E
  - ➡ impulsion = E
  - ➡ longueur = 1/E ➡ courte distance ⇔ haute énergie
  - ➡ durée = 1/E ➡ brève durée ⇔ haute énergie
  - intensité de couplage = E^0 (théories de jauge) ou E^{-2} (Fermi, Newton)
- Facteurs de conversion 1 GeV ~ $(2.0\times10^{-16}\ \mathrm{m})^{-1}$ ~ $(6.6\times10^{-24}\ \mathrm{s})^{-1}$ ~ 1.7×10^{-27} kg
- Masse m ⇔ longueur de Compton $L_C = \hbar/mc = 1/m$ [parfois défini $L_C = h/mc$]
- *Échelle de longueur d'un problème $L >> L_C$ ⇔ effets quantiques relativistes faibles*

Longueur de Compton $L_C = \hbar/mc$

- La longueur (ou distance) de Compton est la taille maximale où cela a un sens de parler d'une seule particule
  - $L \ll L_C \Leftrightarrow$ énergie $E \gg mc^2$
  - ➡ possibilité de produire de nouvelles (paires de) particules
  - ➡ nombre variable de particules
  - Mais si on a plusieurs particules, quelle est la position de LA particule ?
  - ➡ l'état propre de position Ix> perd son sens ➡ l'opérateur **X** perd son sens
  - si la particule est chargée ➡ « nuage » de particules « virtuelles » chargées
  - ➡ écrantage de la charge ➡ charge ressentie par une autre particule variant avec leur distance relative

L_C(électron) = 2.4×10^{-12} m $\qquad$ L_C(proton) = 1.3×10^{-15} m

- Remarques
  - $L_C < \lambda_{\text{de Broglie}} = \hbar/mv$
  - $L_C = \hbar/mc$ ➡ $L_C \to 0$ quand $\hbar \to 0$ *ou* quand $c \to \infty$ $\qquad$ [ħ et c sont des constantes !]
  - Photon : $m = 0$ ➡ $L_C = \infty$ ➡ toujours quantique relativiste ➡ « limite classique » : champ électromagnétique et non particules

Une brève histoire de la théorie quantique des champs

Années 1920

Quantification du champ électromagnétique
Einstein, Dirac …

Années 1930

Apparition d'infinis dans les calculs
Interaction forte non perturbative

Années 1940

Renormalisation
Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson…

Années 1950

Insatisfaction avec la renormalisation
Interaction faible non renormalisable
Zoo des particules

Années 1960

Alternatives: matrice S,
pôles de Regge, bootstrap

Années 1970

Théories de jauge = renormalisables
Mécanisme de Higgs
Unification électrofaible, chromodynamique

Années 1980

Groupe de renormalisation
Grande unification, supersymétrie…

Années 1990-2010

Théories des cordes
Théories conformes

Les axiomes de la physique quantique

	Mécanique quantique	Théorie quantique des champs
1. L'espace des états est un espace vectoriel	1. Produit tensoriel d'espaces de Hilbert	1. Espace de Fock
2. sur lequel agissent des opérateurs • construits à partir d'opérateurs fondamentaux • (anti)commutateurs définis par les symétries	2. Opérateurs fondamentaux • position $\mathbf{X}_i$ • impulsion $\mathbf{P}_i$ • spin $\mathbf{S}_i$ • $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i\hbar\, \mathbf{I}$ [☜ invariance galiléenne]	2. Opérateurs fondamentaux • champ $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$ • [et $\boldsymbol{\pi}(x,t) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\varphi)$] [☛ op. création/annihilation] • $[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\pi}] = i\hbar\, \mathbf{I}$ [☜ invariance lorentzienne]
3. Dynamique donnée par un hamiltonien ☛ équations d'évolution	3. Hamiltonien $\mathbf{H} = (\mathbf{P} - i\mathbf{A})^2/2m + V(\mathbf{X})$ ☛ Schrödinger, Pauli, Dirac	3. Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ ☛ Euler-Lagrange

Quel sens donner à une évolution *temporelle* dans un espace-*temps* ?

De la mécanique quantique à la théorie quantique des champs

Théorie à un quanton

- libre
- ou en interaction avec un champ extérieur
- ex: oscillateur harmonique, Schrödinger, Pauli, Dirac et l'atome d'hydrogène

Théorie à n quantons

- libres
- ou en interaction entre eux
- ou avec un champ extérieur
- ex: physique atomique, moléculaire, physique du solide

Théorie à un nombre variable de quantons

- libres
- ou en interaction entre eux
- ou avec un champ extérieur

➡ existence d'un vide (état sans quanton)
➡ existence d'opérateurs de création et d'annihilation

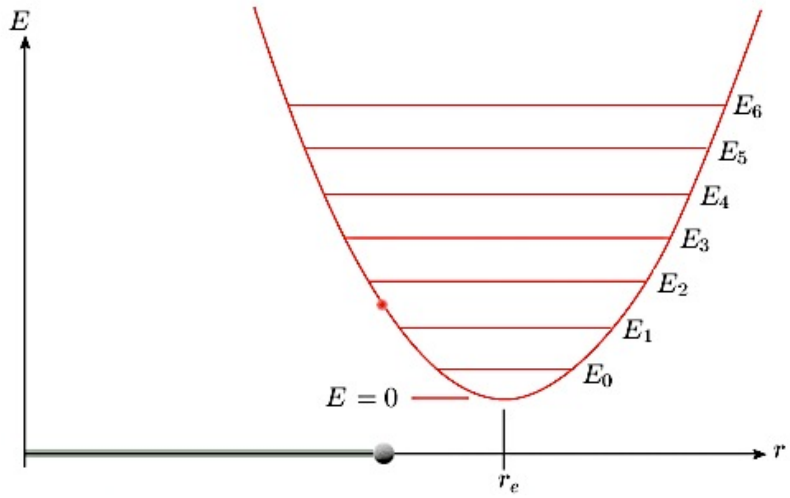
- ex: théorie de Dirac du rayonnement, théorie de Fermi de l'interaction faible, théorie de Yukawa de l'interaction forte, théories de jauge

L'espace de Vladimir Alexandrovitch Fock

- 1 quanton ➡ espace vectoriel E_1 ➡ états $|\psi>$
- 2 quantons identiques ➡ espace vectoriel $E_2 = E_1 \otimes E_1$ ➡ états $|\psi_1, \psi_2>$
  - quantons indiscernables ➡ statistiques de Bose-Einstein ou de Fermi Dirac
  - bosons ➡ symétrisation ➡ espace vectoriel $\mathcal{S}\{E_2\}$ ➡ états $|\psi_1, \psi_2> + |\psi_2, \psi_1>$
  - fermions ➡ antisymétrisation ➡ espace vectoriel $\mathcal{A}\{E_2\}$ ➡ états $|\psi_1, \psi_2> - |\psi_2, \psi_1>$
- n quantons identiques ➡ espace vectoriel $E_n = E_1 \otimes E_1 \ldots \otimes E_1$ ➡ états $|\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n>$
  - quantons indiscernables ➡ espace vectoriel $\mathcal{S}\{E_n\}$ ou $\mathcal{A}\{E_n\}$
- Quantons non conservés ➡ espace vectoriel à 0, 1, 2, … n … quantons
- ➡ $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus \ldots$ $\oplus$ = *somme directe d'espaces*
- ➡ il existe donc des opérateurs envoyant un état de E_n vers un état de E_m ($m \neq n$)
- ➡ opérateur de création $E_n \rightarrow E_{n+1}$
- ➡ opérateur d'annihilation $E_n \rightarrow E_{n-1}$
- et un espace vectoriel E_0 ne contenant aucun quanton ➡ $\boxed{E = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus \ldots}$

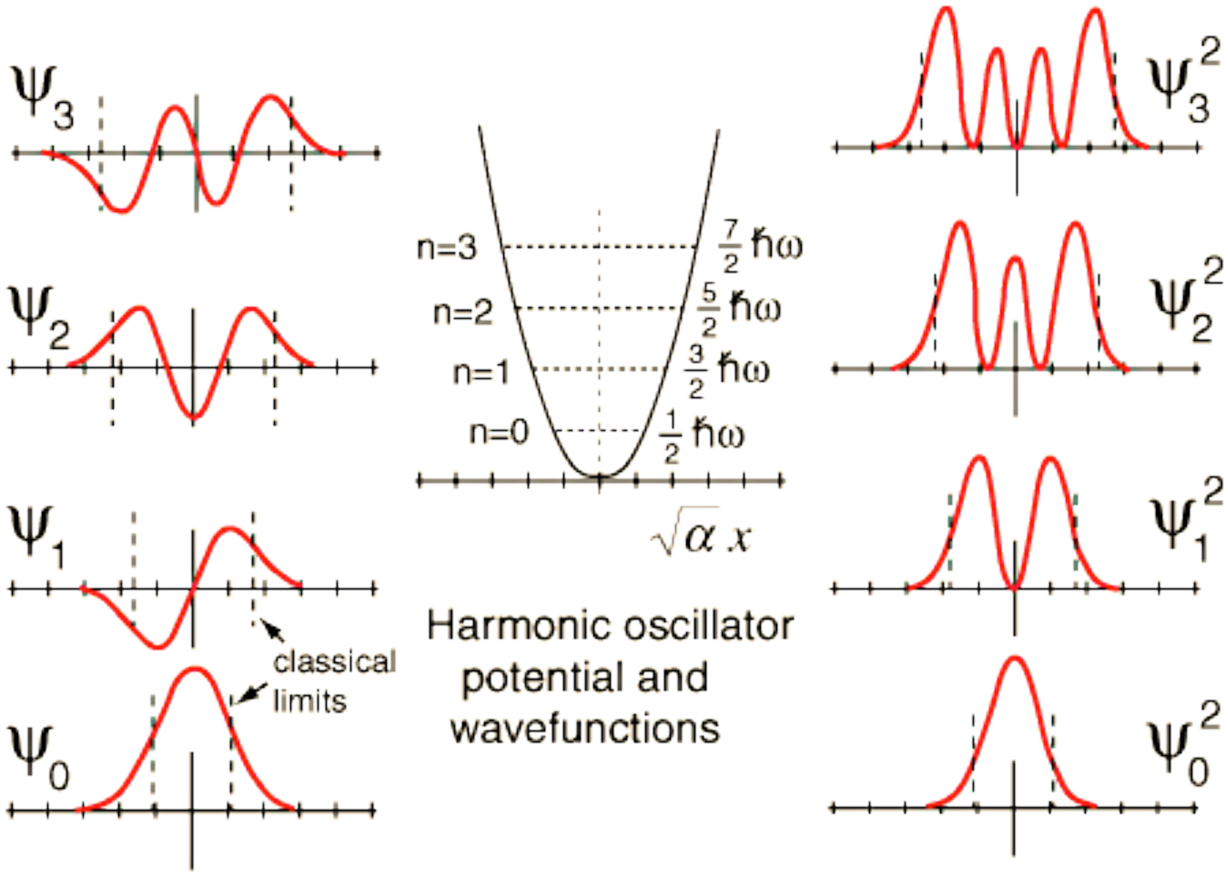
L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Oscillateur harmonique : mécanique quantique



- Potentiel parabolique $V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{X}^2$
- $\Rightarrow$ équation de Schrödinger (ind. du temps)
- $-\hbar^2/2m\, \partial^2\psi(x)/\partial x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E\, \psi(x)$
- essai : $\psi(x) = \psi(0) \exp\{-\alpha x^2\}$
- $\Rightarrow \alpha = m\omega/\hbar$
- $\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega > 0$
  - énergie minimale E_0 non-nulle $\Leftrightarrow$ inégalité de Heisenberg
  - $\psi(x)$ ne s'annule jamais $\Leftrightarrow$ probabilité non-nulle d'être à une distance arbitrairement grande de l'origine ($\neq$ avec le cas classique où le déplacement est limité par l'énergie disponible)
- Solution générale $\Rightarrow \psi_n(x) = \psi(0) \exp\{-\alpha x^2\} H_n(\sqrt{\alpha}\, x)$ [les H_n sont les polynômes de Hermite]
- $\Rightarrow \psi_n(x)$ oscille de plus en plus rapidement quand n augmente
- et $E_n = E_0 + \mathbf{n}\, \hbar\omega$ $\quad (\hbar\omega = h\nu)$

Oscillateur harmonique : mécanique quantique



Probabilité maximale près des bords [↗ avec n]
⇌ cas classique

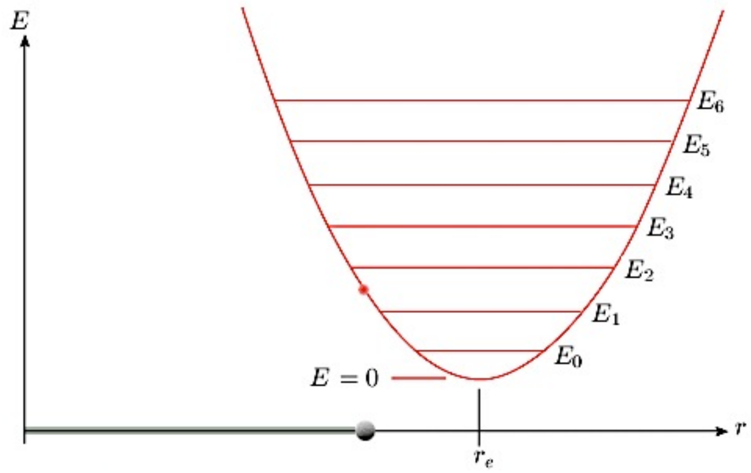
Probabilité maximale près de l'origine

D'après http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum

Oscillateur harmonique : théorie quantique des champs

- Oscillateur harmonique ➡ valeurs propres du hamiltonien $E_n = [n + ½]\,\hbar\omega$

- ➡ 1° interprétation : un quanton qui peut être
  - dans l'état de plus basse énergie $E_0 = ½\,\hbar\omega$
  - dans l'un des états excités $E_n = [n + ½]\,\hbar\omega$
  - état propre du hamiltonien ⇔ état stationnaire
  - [mais transition éventuelle par action externe]



- ➡ 2° interprétation :
  - pas de quanton ➣ énergie du « vide » $E_0 = ½\,\hbar\omega$
  - un quanton ➣ énergie $\hbar\omega$ (+ énergie du vide)
  - deux quantons ➣ énergie $2\,\hbar\omega$ (+ énergie du vide)
  - n quantons ➣ énergie **n** $\hbar\omega$ (+ énergie du vide)
  - transition ⇔ création ou annihilation d'un quanton porteur d'une énergie $\hbar\omega = h\,\nu$

- ➡ collection de N oscillateurs harmoniques : modèle d'un champ quantique

Les opérateurs de création et d'annihilation (Dirac)

- *Les opérateurs fondamentaux étant la position **X** et l'impulsion **P** , quels sont les opérateurs créant ou annihilant un état In> ?*

- $\mathbf{H} = \mathbf{P}^2/2m + \frac{1}{2} m\, \omega^2 \mathbf{X}^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega\, (\mathbf{P}^2/m\hbar\omega + m\omega/\hbar\, \mathbf{X}^2) = \frac{1}{2} \hbar\omega\, (\mathbf{P'}^2 + \mathbf{X'}^2)$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X'} + i\, \mathbf{P'})/\sqrt{2} \qquad\qquad \mathbf{a}^\dagger = (\mathbf{X'} - i\, \mathbf{P'})/\sqrt{2}$$

- $[\mathbf{X},\mathbf{P}] = i\, \hbar\, \mathrm{I} \Rightarrow [\mathbf{X'},\mathbf{P'}] = i\, \mathrm{I} \Rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathrm{I}$

- $\Rightarrow \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{X'}^2 + \mathbf{P'}^2 + i(\mathbf{X'P'} - \mathbf{P'X'}) \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{X'}^2 + \mathbf{P'}^2 - \mathrm{I} \}$

- $\Rightarrow \mathbf{H} = \hbar\omega\, (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathrm{I}) = \hbar\omega\, (\mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathrm{I})$

- $\Rightarrow$ valeurs propres

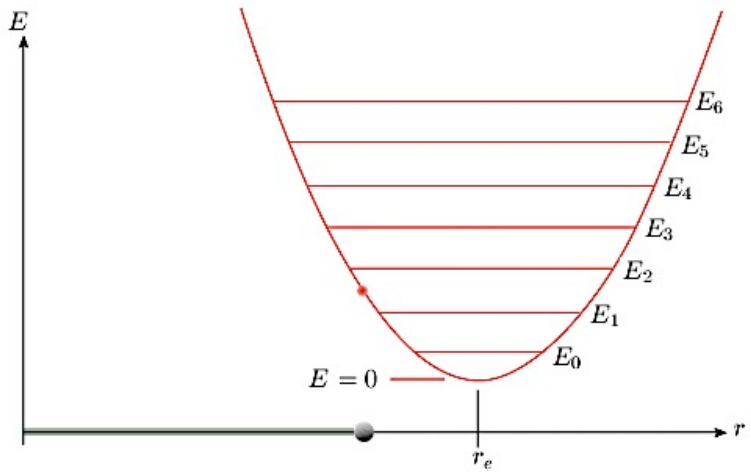
$$\mathbf{N}\, |n\rangle = n\, |n\rangle \quad ☛ \quad E = \hbar\omega\, (n + \tfrac{1}{2})$$

Les opérateurs de création et d'annihilation (Dirac)

- Valeurs propres et vecteurs propres
  - **N** |n> = n |n> ☛ $E = \hbar\omega\,(n + ½)$
  - ➡ **a** |n> = $n^{½}$ |n-1>

    en utilisant [**N**,**a**] = –**a**
  - et **a**† |n> = $(n+1)^{½}$ |n+1>

    en utilisant [**N**,**a**†] = **a**†
  - on montre que n est un nombre entier positif



- L'état fondamental |0> (correspondant à $E = ½\,\hbar\omega$) est solution de l'équation
  - **a** |0> = 0 ⇔ $\partial\psi/\partial x + ½\; m\omega/\hbar\; x\; \psi = 0$
  - ➡ $\psi_0 \propto \exp\{- m\omega/\hbar\; x^2\}$
- Les autres états ψ_n = <x|n> s'obtiennent en appliquant **a**† de manière répétée à |0>
  - ➡ polynômes de Hermite

LE CHAMP SCALAIRE

Champs classiques et approche lagrangienne

- Champ = quantité φ définie en tout point de l'espace et du temps ➡ φ(x,t)
  - Un champ peut présenter des symétries (internes ou spatio-temporelles)
  - ➡ plusieurs composantes (scalaire, vecteur, tenseur, spineur)
  - ➡ plusieurs variétés de champ présents (par ex: électrique, magnétique…)

- Particules
  - ☛ degrés de liberté : coordonnées (généralisées) x(t) en nombre fini et vitesses x' = ∂x/∂t
  - ☛ lagrangien $\mathcal{L}$(x, x') ☛ équations du mouvement (Euler-Lagrange)

- Champ
  - ☛ degrés de liberté : valeurs en chaque point du champ φ(x,t) et de sa dérivée φ' = ∂φ/∂t
  - ☛ lagrangien $\mathcal{L}$(φ, φ') ☛ équations du mouvement (Euler-Lagrange)
  - ☛ version relativiste $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial x) = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$
  - (en théorie quantique des champs, le lagrangien ne dépend pas des dérivées secondes, mais cela arrive dans la théorie non-relativiste de la matière condensée)
  - Action $S = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\, d^4x$ ☛ équations du mouvement (Euler-Lagrange)

Champ scalaire classique

- Propriété de transformation simple sous les rotations de l'espace : invariant !
  - ➡ champ sans indice $\varphi(x,t)$
- Lagrangien (densité) scalaire
  - ➡ tous les indices μ d'espace-temps pouvant apparaître sont sommés (« contractés ») deux à deux
  - ➡ si un terme $\partial_\mu\varphi$ apparaît, il doit être multiplié par « quelque chose » indice μ
- Lagrangien = énergie cinétique – énergie potentielle
  - ➡ terme cinétique = vitesse = $\partial_0\varphi$ ➡ $\partial_\mu\varphi$ ➡ $\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi = \frac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\mu\varphi$
  - ➡ terme potentiel = a priori somme de termes en φ, φ^2, φ^3, φ^4, etc.
  - terme linéaire ➡ difficultés
  - terme quadratique ➡ $-\frac{1}{2}\, m^2\, \varphi^2$
  - termes de degré > 2 ➡ interactions
- ☛ Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\, m^2\, \varphi^2$
- ☛ Euler-Lagrange : $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi = \partial_\mu\, [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi)]$ ➡ $-m^2\, \varphi = \partial_\mu\partial_\mu\varphi = \Box\varphi$
- ☛ équation de Klein-Gordon : $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$

Champ scalaire quantique : c'est *presque* pareil !

- Équation de Klein-Gordon $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$
- ➡ solutions de la forme $e^{i(\omega t \pm kx)}$ avec $\omega^2 = k^2 + m^2$
- ➡ *interprétations* : m = masse, ω = énergie, k = impulsion
- **Mais masse, énergie et impulsion de quoi ?**
- Quantification ⇔ le champ est un opérateur
- Solution générale : $\varphi(x,t) = \Sigma_k \; a^\dagger_k \, e^{ikx} + a_k \, e^{-ikx}$

Opérateur

Opérateur de création
d'un quanton (ω,k)

Opérateur d'annihilation
d'un quanton (ω,k)

- ➡ quantons (excitations) du champ ~ particules d'énergie ω et d'impulsion k définies
  ➡ *non localisées (inégalités de Heisenberg)*
- Attention : φ(x,t) n'a *rien* à voir avec une fonction d'onde

Merci de votre attention !