

ASTROPHYSIQUE

3 – GRAVITATION



Alain Bouquet

Laboratoire AstroParticule & Cosmologie
Université Denis Diderot Paris 7, CNRS, Observatoire de Paris & CEA





NEWTON

LA GRAVITATION SELON NEWTON

- Un corps de masse M exerce sur un corps de masse m une force F
 - proportionnelle aux masses M et m
 - inversement proportionnelle au carré de la distance R entre les masses

■ Soit

$$F = G \frac{M m}{R^2}$$

où G est la constante de Newton

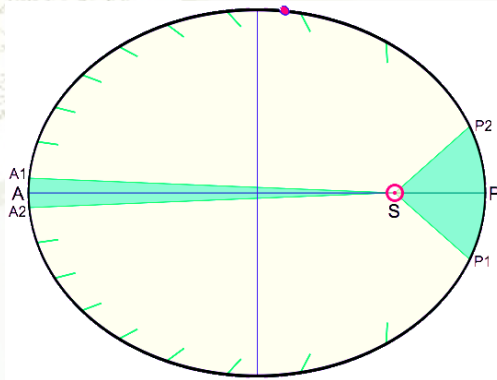
- ★ Le corps de masse m exerce *la même* force que le corps de masse M

- Cette loi très simple permet de calculer
 - le mouvement de tous les astres
 - et de tous les satellites, sondes, etc.
- Mais aussi
 - les marées, terrestres ou non
 - l'aplatissement de la Terre
 - la structure interne des étoiles
 - la dynamique des galaxies



LES LOIS DE KEPLER DÉCOULENT DE CELLES DE NEWTON

- 1° loi: les planètes suivent des ellipses dont le Soleil occupe un foyer



- 2° loi: des aires égales sont balayées en des temps égaux
- 3° loi: le carré de la période est proportionnel au cube du $\frac{1}{2}$ grand axe
 - → permet de calculer la distance de toutes les planètes connaissant la distance de l'une d'elle

- Cas simple: mouvement circulaire

- $\gamma = GM / R^2 = V^2 / R$
- Période $T = 2\pi R / V$
- $\Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 R^2 / V^2 = [4\pi^2/GM] R^3$

- On retrouve la 3° loi de Kepler
- Le coefficient de proportionnalité donne la **masse** du corps central

- si on connaît G

- Planètes => masse du Soleil
- Satellites => masse de la planète

- même si on ne connaît pas G, on peut calculer le *rapport* des masses, et donc les *densités relatives*

EXPÉRIENCE DE CAVENDISH: LA MESURE DE G

- Balance de torsion

- Principe

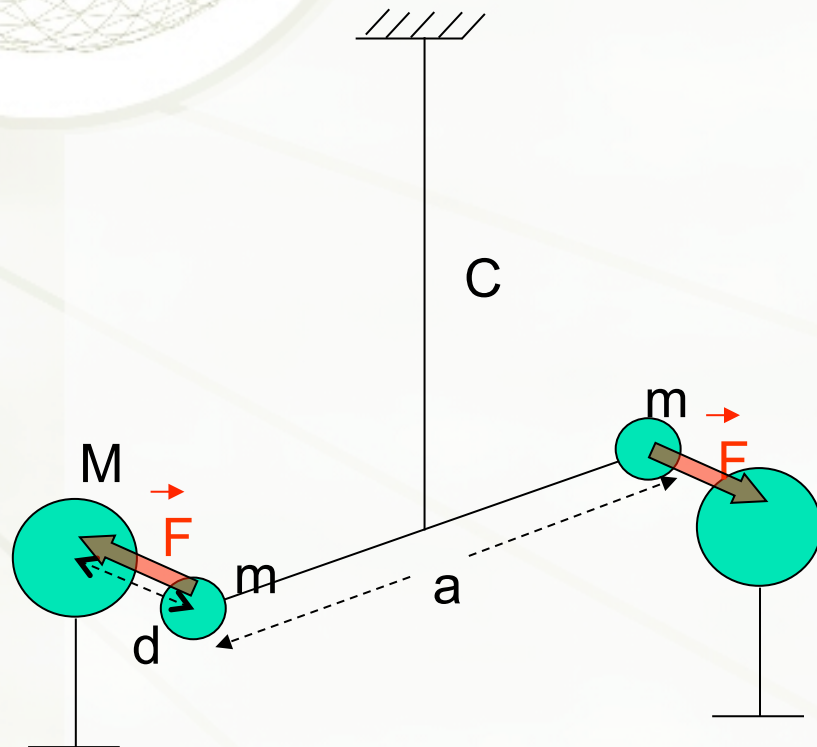
- En approchant les grandes masses des petites, le pendule de torsion tourne d'un angle α proportionnel à G

$$\alpha = 2 G M m a / [C d^2]$$

- La constante C de torsion du fil est donnée par la période d'oscillation du pendule $T = 2\pi [2ma^2/C]^{1/2}$

- $\rightarrow G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg sec}^2)$

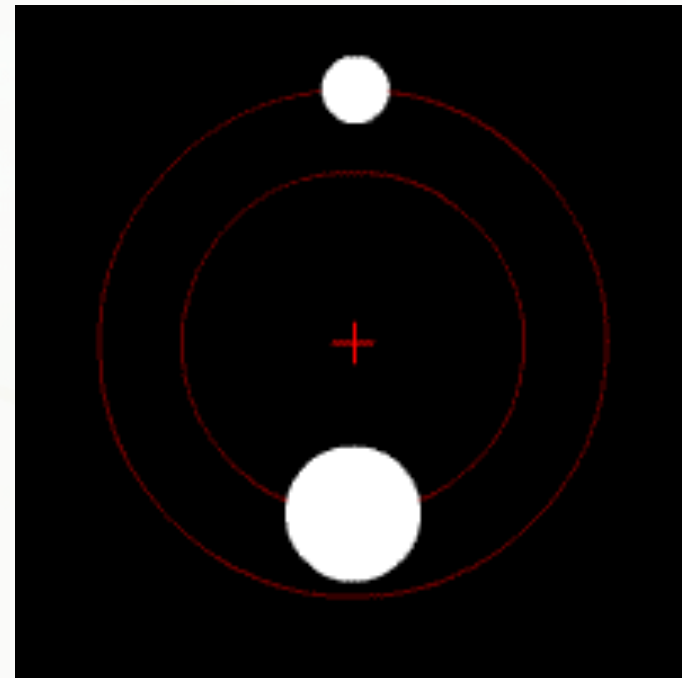
- L'objectif de Cavendish était en fait de « peser » la Terre, pas de mesurer G



LE PROBLÈME À N CORPS (1)

- Problème à 1 corps
 - Une masse importante
 - Une ou plusieurs masses négligeables
 - → lois de Kepler
- Problème à 2 corps
 - Deux corps de masses comparables
 - Se ramène mathématiquement au problème à 1 corps
 - Les masses orbitent autour de leur centre de masse → Kepler
- Problème à 3 corps
 - Trois corps de masses comparables
 - Problème insoluble exactement
 - → solutions approchées

- En orbite autour du centre de masse:



SYSTÈME BINAIRE

- Et quand le centre de masse se déplace par rapport à l'observateur

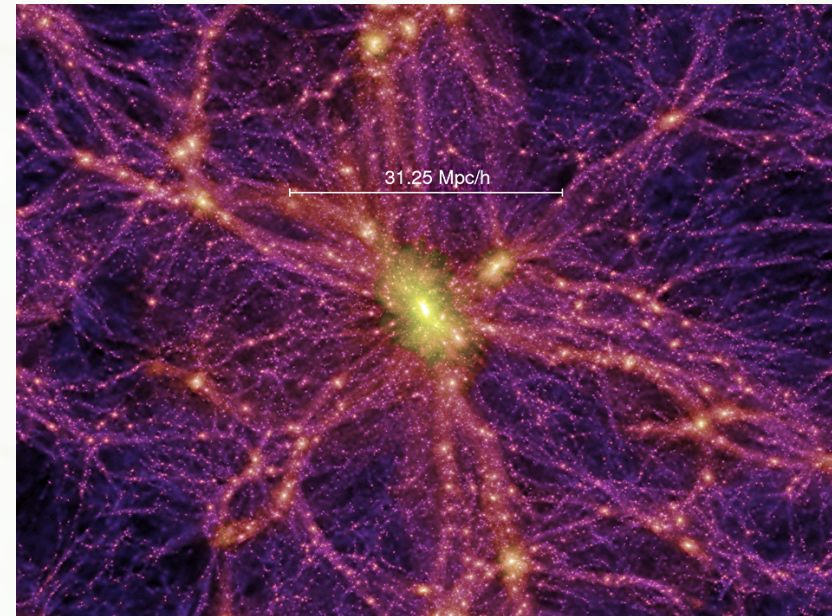


LE PROBLÈME À N CORPS (2)

- Si le nombre de corps en interaction gravitationnelle est très grand, les méthodes statistiques s'appliquent
 - → Formes d'équilibre des systèmes autogravitants (planètes ou galaxies)
 - → Stabilité des amas d'étoiles
- Théorème du viriel (Clausius 1870)
 - La moyenne de l'énergie cinétique T d'un système autogravitant de N corps en équilibre est égale à la moitié de leur énergie potentielle U

$$\langle T \rangle = - \frac{1}{2} \langle U \rangle$$

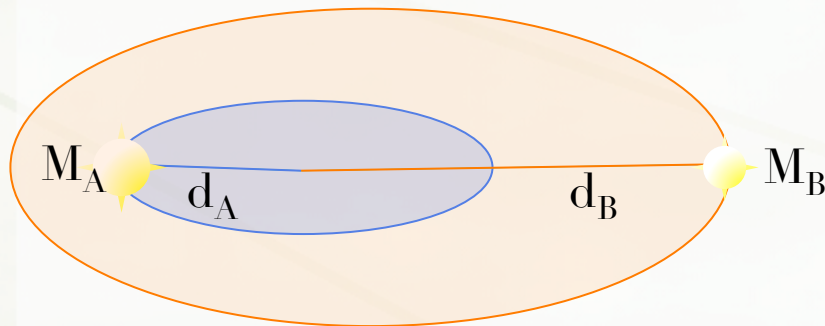
- Simulations numériques



- Simulation *Millenium* de 2160^3 «particules» en interaction pour étudier la formation des amas de galaxies

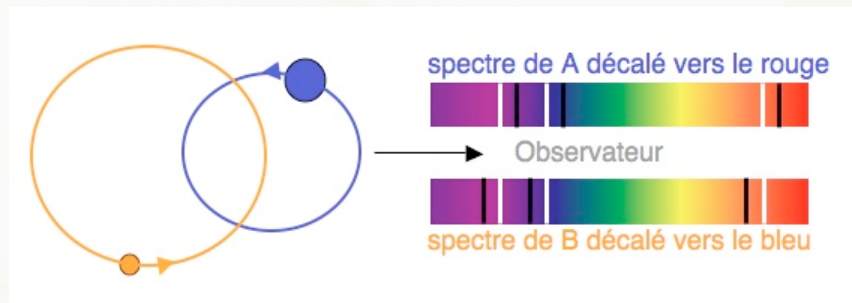
MASSE DES ÉTOILES

- Étoile solitaire?
 - Il faut une planète
 - ou une théorie des étoiles ($L \Rightarrow M$)
- Étoiles binaires
 - en orbite autour de leur centre de masse avec une période T



- $M_A d_A = M_B d_B$
- Kepler : $(M_A + M_B) T^2 = (d_A + d_B)^3$
M en M_{solaire} si T en années et d en U.A.

- Évidemment il faut connaître la distance du système binaire, et l'inclinaison du plan orbital
- Cela suppose que les deux étoiles soient vues séparément (binaire visuelle)
- Un peu plus compliqué pour les binaires à éclipses et les binaires spectroscopiques



MASSE DES GALAXIES

Galaxies spirales

- Les étoiles ont
 - un mouvement de rotation d'ensemble, dans le plan de la spirale à une vitesse de quelques centaines de km/s
 - des mouvements plus erratiques de quelques (dizaines de) km/s
- Encore Kepler ?
 - Vitesse de rotation $V(r)$
 - → Masse à l'intérieur de l'orbite
 - $M(r) = r V^2(r) / G$
 - Observation $V(r) \sim \text{constante}$
 - → M augmente avec r → où s'arrêter?

Galaxies elliptiques

- Les étoiles ont des vitesses dans tous les sens
 - Conséquence des *très* nombreuses interactions gravitationnelles
- Statistiquement, on a une *distribution* des vitesses
 - Avec une vitesse moyenne (nulle dans le référentiel du centre de masse)
 - Et une dispersion $\langle V^2 \rangle$ autour de la vitesse moyenne
- Théorème du viriel
 - Énergie cinétique proportionnelle aux masses
 - Énergie potentielle proportionnelle au **carré** des masses

MARÉES

- Conséquence d'un champ de gravitation qui n'est pas uniforme

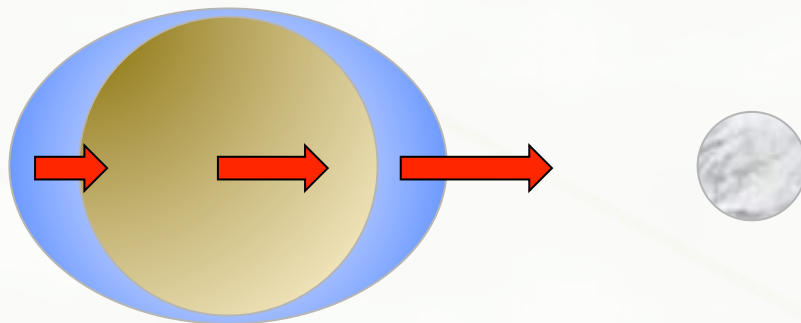
- → la force de gravité n'est pas la même en deux points d'un objet étendu
- → la différence des forces déforme cet objet

- La Lune attire fortement la partie de la Terre proche d'elle, un peu moins le centre de la Terre, et encore moins la partie la plus éloignée

- → déformation

- Plus sensible pour les parties fluides

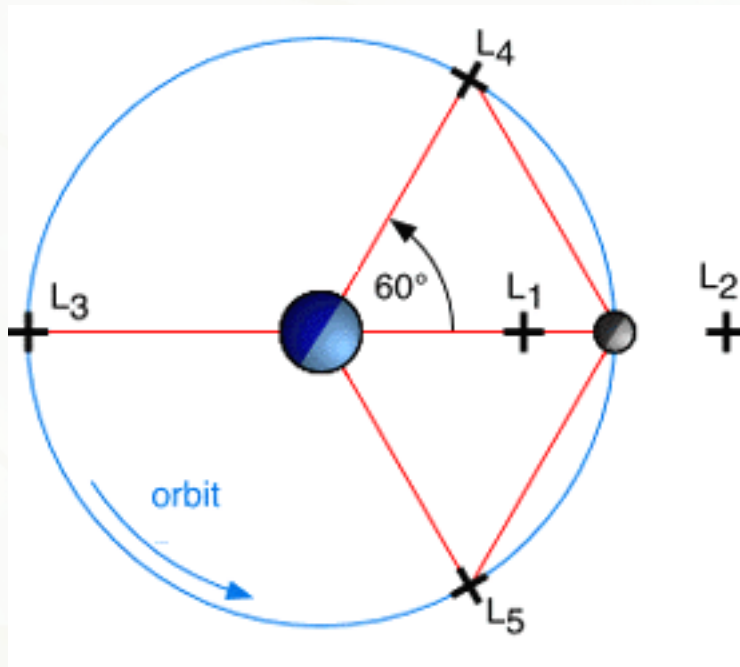
- océans
- magma



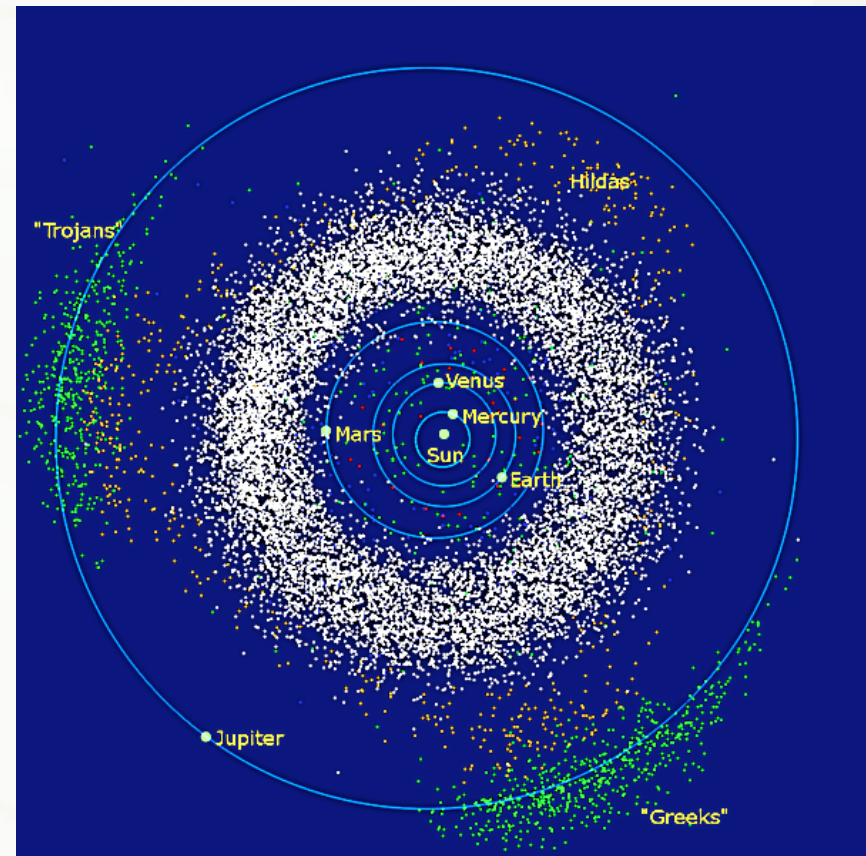
S'y ajoute l'influence du Soleil

POINTS DE LAGRANGE

- 5 points d'équilibre dans un système de deux masses
 - (cas particulier du problème à 3 corps)
 - L_1 , L_2 et L_3 sont instables (stables en θ mais instables en r)
 - L_4 et L_5 sont quasi-stables



- Astéroïdes «grecs» et «troyens» en L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter



GALILÉE ET LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

- Masse inertielle

- $F = m_i \gamma$

- Masse grave

- $F = G m_g m_g' / R^2$

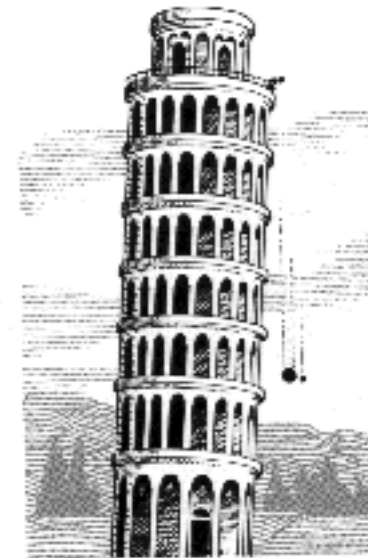
- Si $m_i = m_g$, l'accélération subie par un corps ne dépend pas de ce corps

$$\gamma = G m' / R^2$$

- → La trajectoire gravitationnelle suivie par un corps ne dépend pas du corps
- En particulier elle ne dépend ni de sa composition ni de sa structure interne

- Principe d'équivalence

- L'accélération de la gravité est identique pour toutes les masses



- Point de départ de la relativité générale

MÉDITONS SUR LES MYSTÈRES DE L'UNIVERS



PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

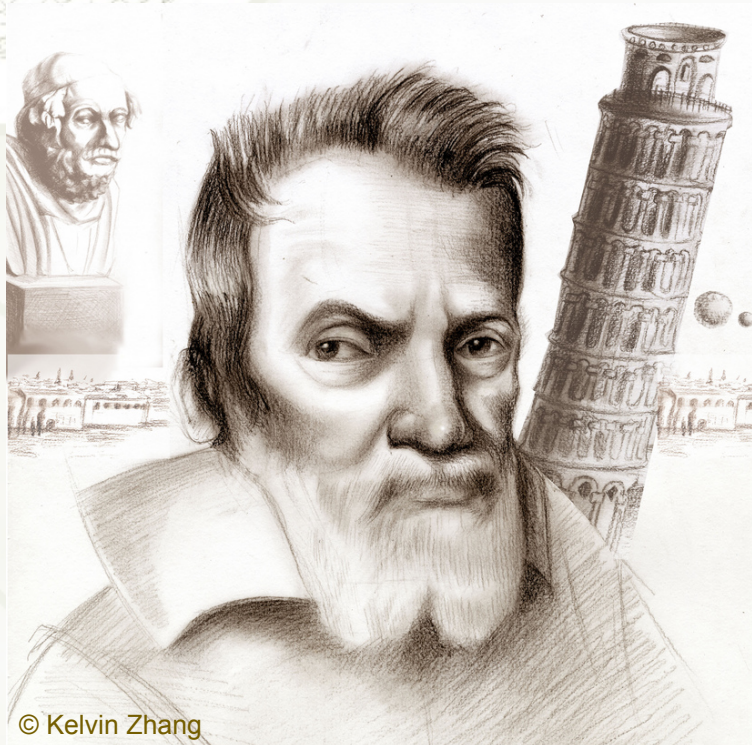
Galileo Galilei

- Galilée à la Tour penchée de Pise

- Tests (Eötvös...)

$$M_{\text{inertielle}}/M_{\text{grave}} = 1 \pm 10^{-13}$$

- Accélération pure \Rightarrow analogue à la force centrifuge ?
- Comment faire disparaître la gravitation ?
 - « Expérience » de l'ascenseur

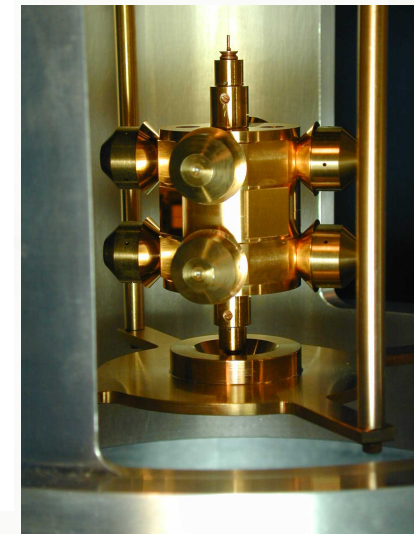
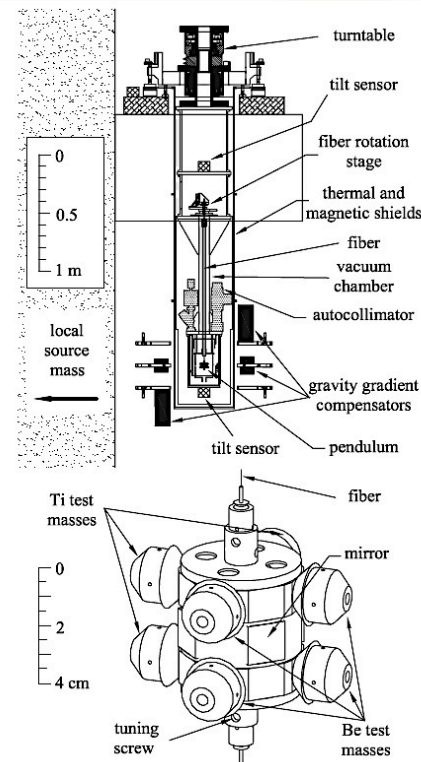


Tous les corps ont la même accélération dans un champ de gravitation *quelle que soit leur masse ou leur composition*

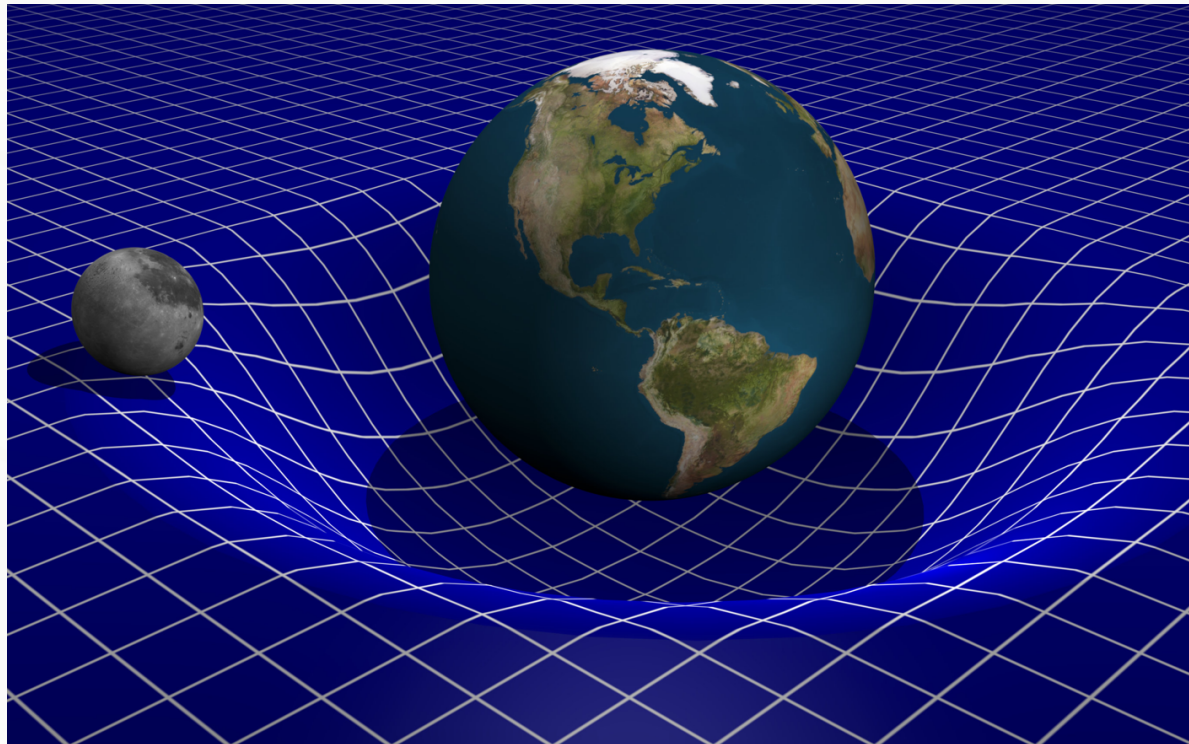
VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DU PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

- Isaac Newton
 - Pendules en matériaux différents
 - → écart relatif $< 10^{-3}$
- Loránd Eötvös
 - Pendule de torsion, sensible à la différence entre la gravitation et l'accélération due à la rotation de la Terre
 - $< 10^{-6}$ (1885)
 - $< 10^{-8}$ (1909)
- Robert Dicke
 - Pendule de torsion
 - $< 10^{-11}$ (1964)
- Projet de satellite STEP
 - $< 10^{-18}$ (2013?)

- Équipe Eöt-Wash $< 10^{-13}$ (2008)
 - Différence d'accélération entre Be et Ti



EINSTEIN



L'ASCENSEUR D'EINSTEIN

- Tous les effets de la gravitation disparaissent quand on est en chute libre
- Il n'existe **aucune différence observable** entre

et

- La gravitation apparaît comme une *force fictive*, comme la force centrifuge
 - indépendante du corps qui la subit
 - et disparaissant par un choix « correct » du référentiel



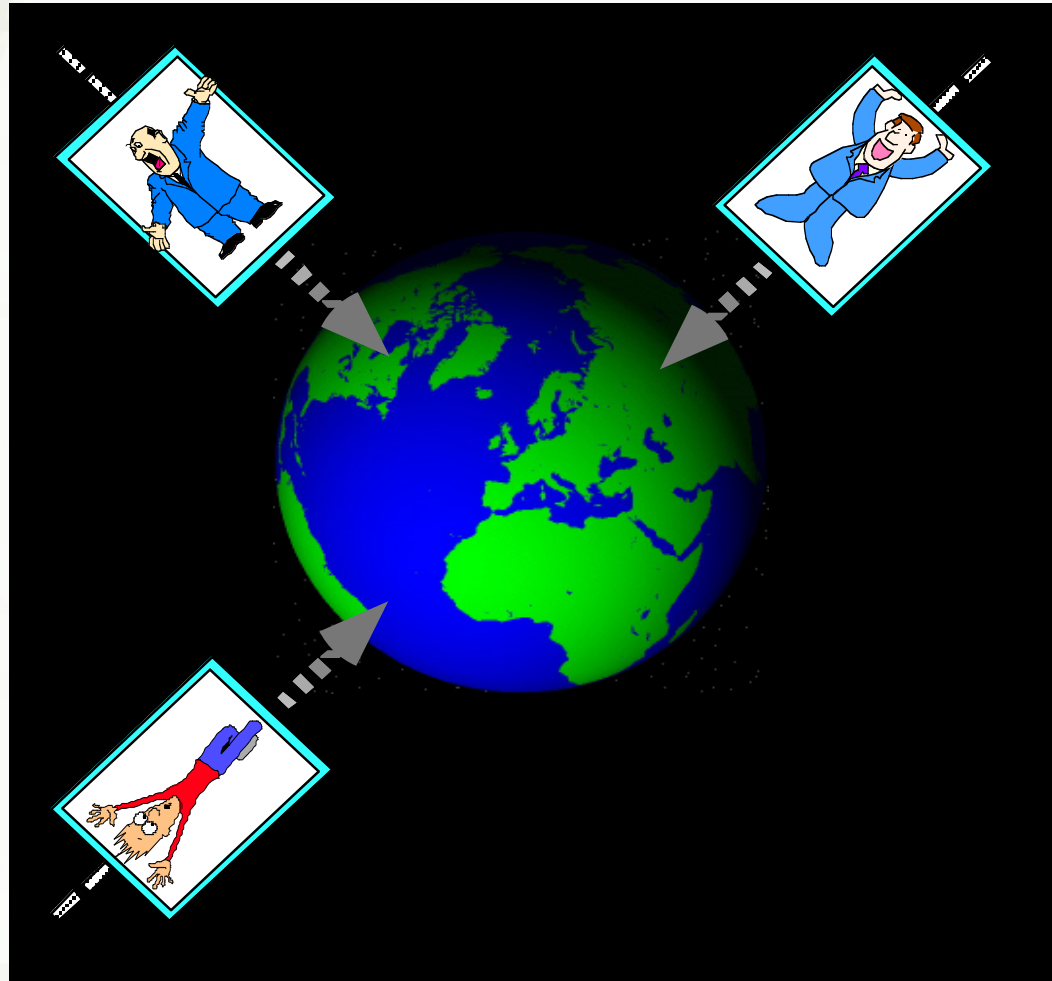
Force de gravitation
dans un référentiel *immobile*



Aucune force
Mais un référentiel *accélééré*

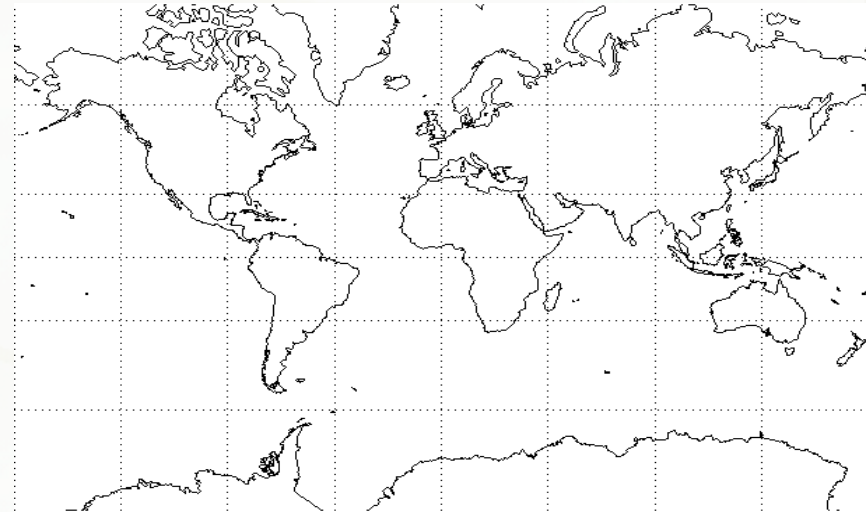
UN ASCENSEUR BIEN ÉTONNANT

- Mais l'équivalence n'est que **locale** ⇒ courbure de l'espace-temps



UNE QUESTION DE COURBURE

- Analogie avec la surface de la Terre
 - Près de chaque point, la surface est à peu près plate et on peut tracer une carte plane (euclidienne)
 - Mais il est impossible de raccorder ces cartes sans déformer la surface.
 - **Normal: la sphère est une surface de courbure intrinsèque positive, le plan de courbure intrinsèque nulle**
 - *Intrinsèque? Le cylindre a la même courbure que le plan, puisqu'on peut rouler une carte sans la déformer*
- ⇒ La géométrie de la surface de la Terre n'est **pas** euclidienne
 - la somme des angles des triangles est $> 2\pi$
 - le périmètre des cercles est $< 2\pi * \text{rayon}$
 - etc.



LA COURBURE DE L'ESPACE-TEMPS

- De même, on peut toujours représenter localement la géométrie de l'espace-temps par un espace-temps plat (celui de Minkowski, le référentiel « en chute libre »)
- Mais ce n'est pas le même en des lieux différents : les « Minkowski » ne se raccordent pas mieux que les cartes planes de la surface de la Terre

- **L'espace-temps est courbe**

- $\partial s^2 \neq c^2 \partial t^2 - [\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2]$

- $\Rightarrow \partial s^2 = \sum g_{\mu\nu} (x) \partial x_\mu \partial x_\nu$

par exemple

$$\partial s^2 = c^2 \partial t^2 - \mathbf{a}^2(t) [\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2]$$

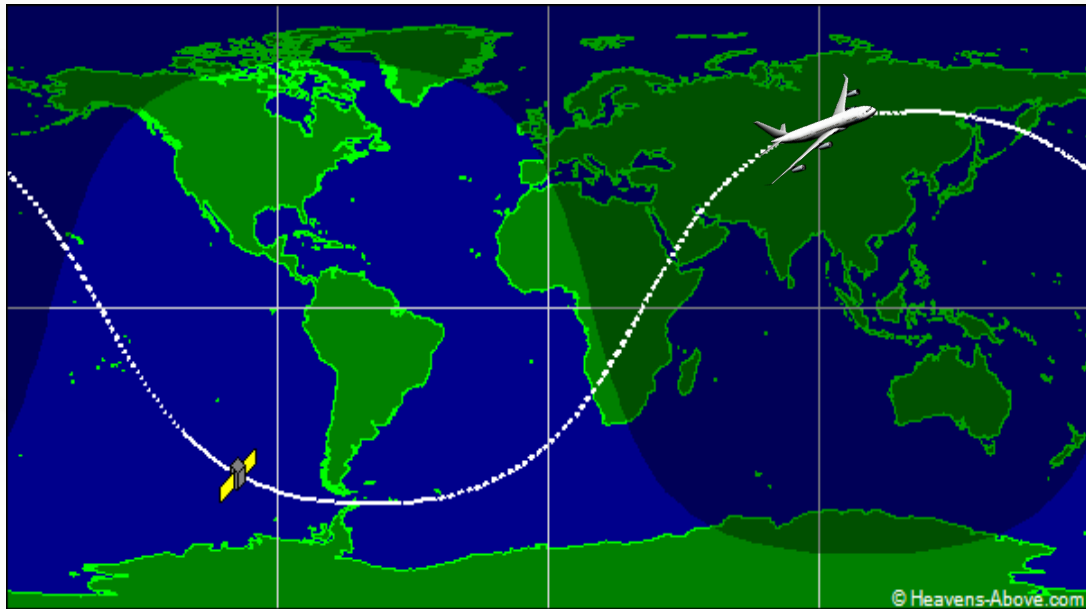
(théorie du big bang)



CE QUE CELA VEUT DIRE

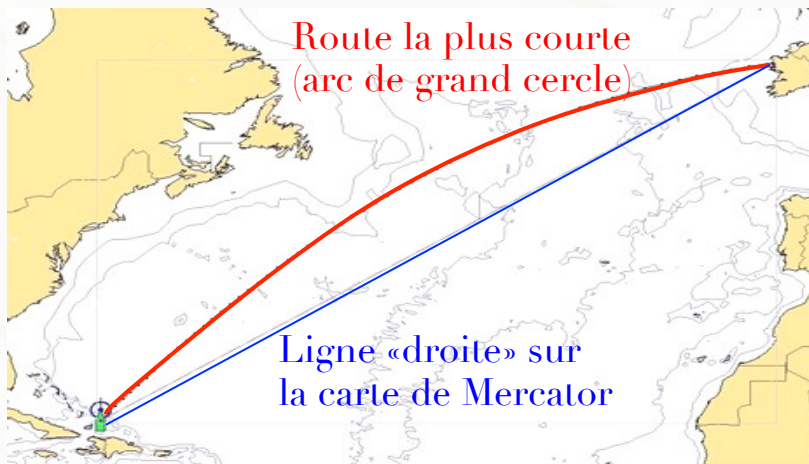
- La gravitation n'existe pas, c'est une force fictive
- \Rightarrow le Soleil n'exerce aucune force « gravitationnelle » sur la Terre
- \Rightarrow la Terre se déplace en ligne droite à vitesse constante (1^o loi de Newton)
- **mais dans un espace-temps courbe à 4 dimensions**
- \Rightarrow sa trajectoire se referme sur elle-même (orbite)
 - comme le trajet d'un avion volant en ligne droite (cap constant) pendant 40 000 km

- Ceci est général :
 - Tout objet se déplace dans l'univers en ligne droite à vitesse constante, mais dans un espace-temps courbe
 - Y compris la lumière

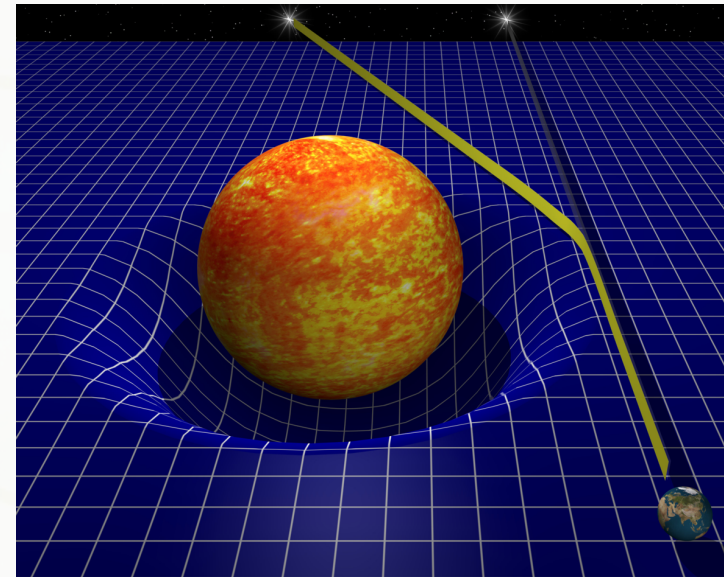


CONSÉQUENCES : «DÉVIATION» DES RAYONS LUMINEUX

- La lumière se déplace en ligne droite
- Mais la ligne droite (le chemin le plus court) peut sembler courbe *quand on utilise un référentiel inadéquat*
- Analogie: encore la surface de la Terre
 - Pour aller d'Irlande aux Antilles



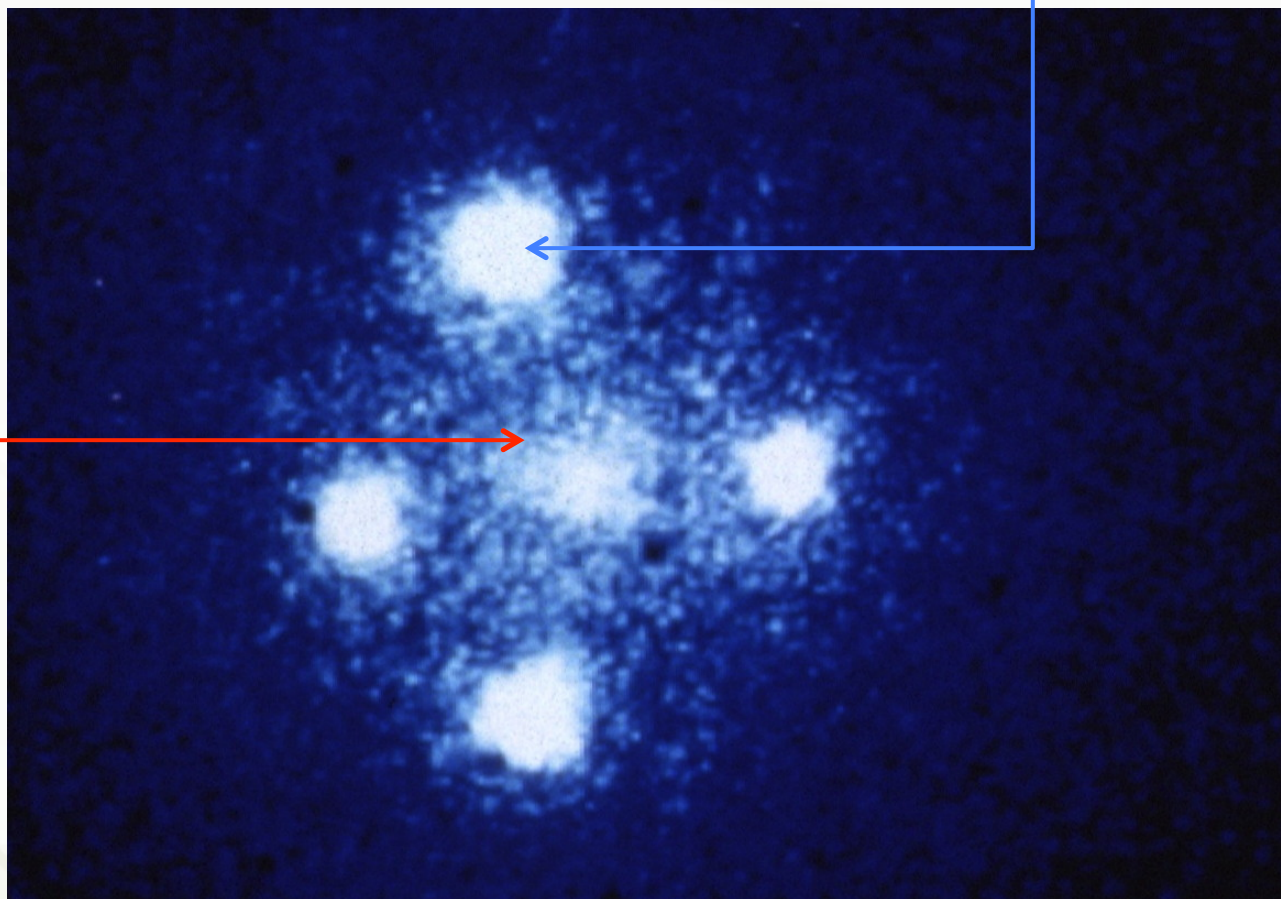
- Déviation de la lumière à proximité d'une masse

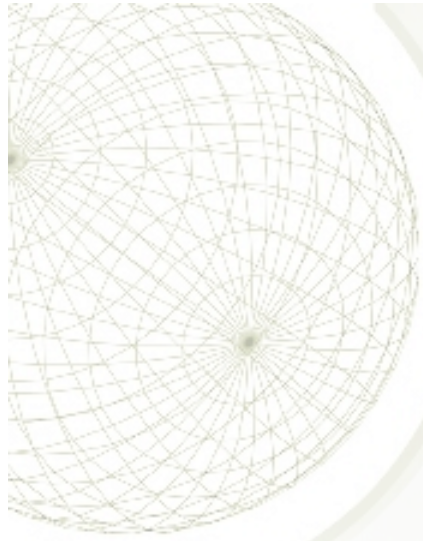


- Un rayon lumineux qui rase le Soleil est dévié de 1'' d'arc
- → Premier test de la relativité générale en 1919

LA CROIX D'EINSTEIN

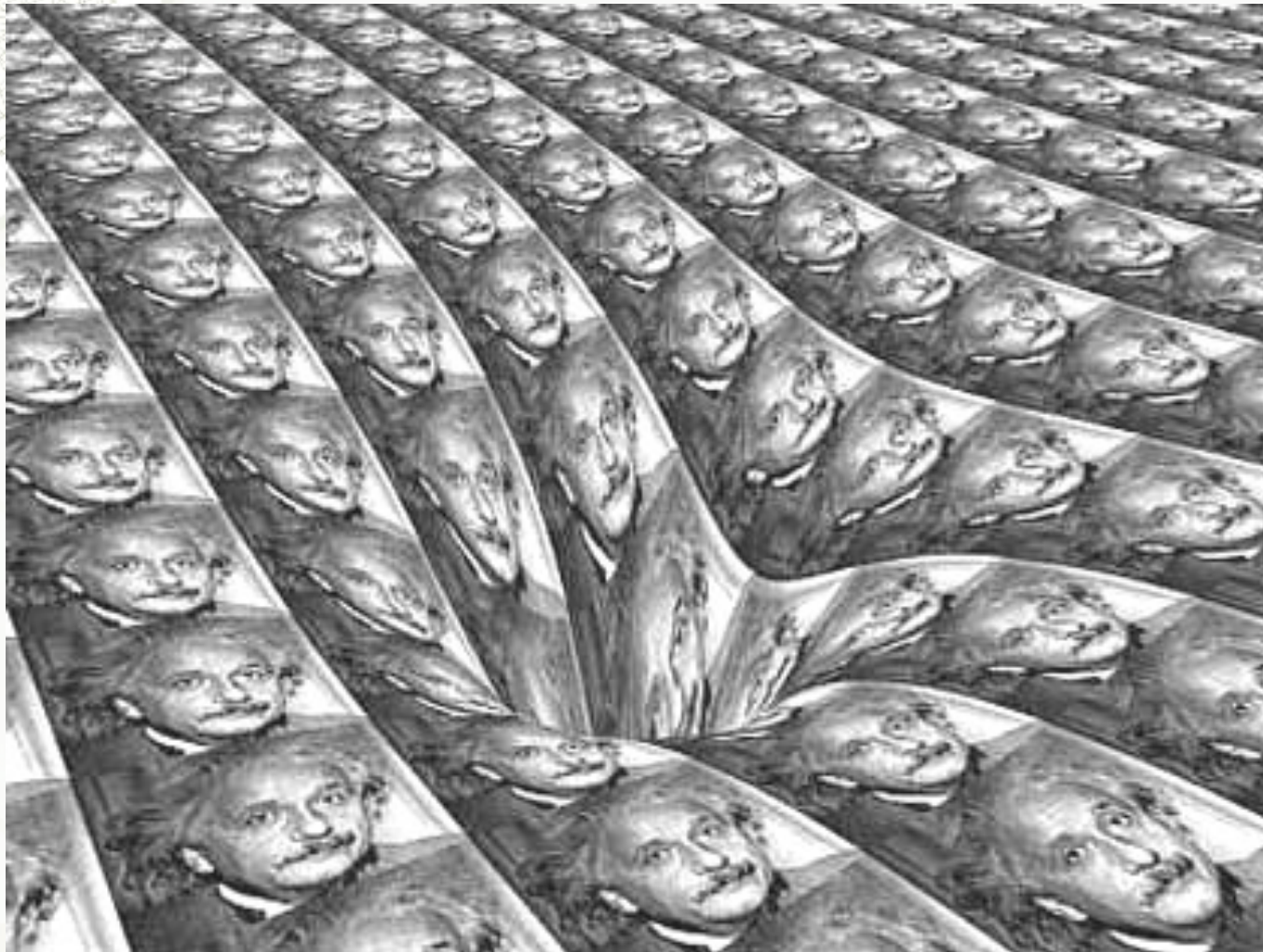
- La galaxie ZW 2237+030 à 400 millions a.l. donne 4 images du quasar QSO 2237+0305 situé en arrière-plan, à 8 milliards a.l.





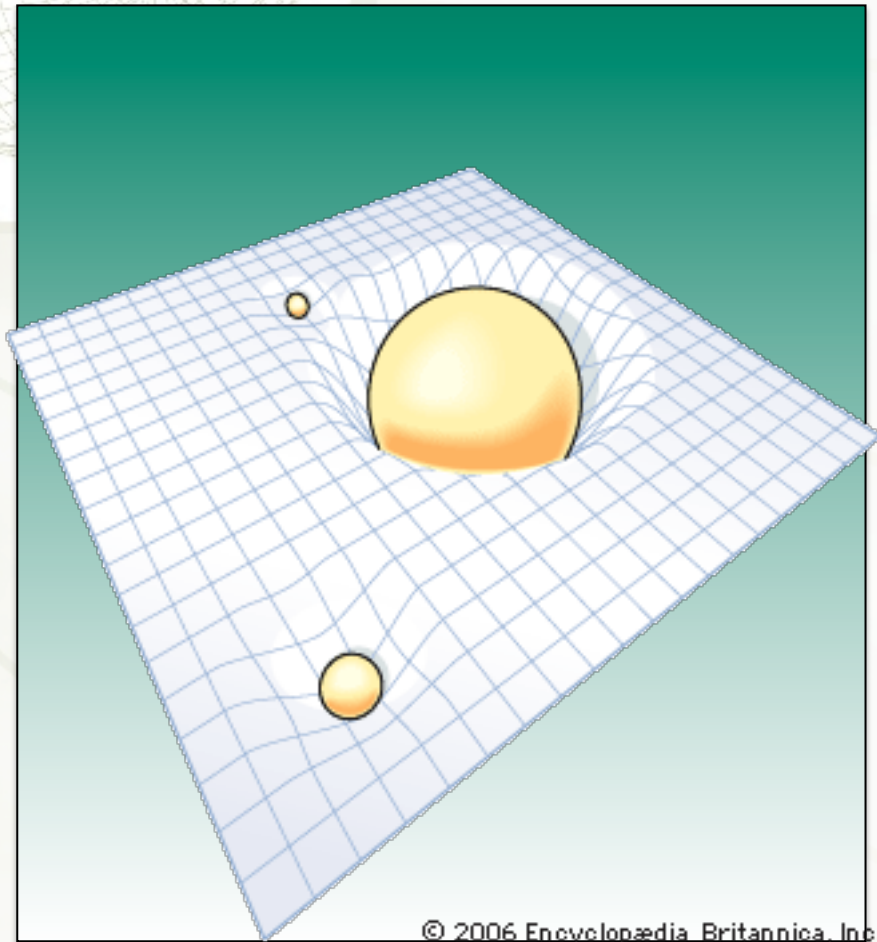
LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

SCHÉMATIQUEMENT



COMMENT LA MATIÈRE COURBE L'ESPACE-TEMPS

- La présence de matière influe sur la courbure de l'espace-temps



- Naïvement : plus il y a de matière, plus il y a de courbure
- Mais il y a de la courbure (\Leftrightarrow de la gravitation) même là où il n'y a pas de matière
 - au-dessus de la Terre par exemple!
 - ou loin du Soleil
- C'est un peu plus subtil :
 - la matière induit une courbure là où elle se trouve
 - cette courbure induit une courbure plus faible dans son voisinage
 - et cela se propage ainsi de proche en proche

UN PEU DE MATHS ? COURBURE \Leftrightarrow MATIÈRE

- La matière est décrite par sa distribution
 - de masse (densité pour une distribution continue)
 - d'énergie (rappel : $E = mc^2$)
 - de quantité de mouvement (impulsion)
 - de température, pression...

- Tout ceci est encodé dans un objet mathématique, le *tenseur énergie-impulsion* T
 - qui varie en général d'un point à l'autre

- La courbure – elle – est encodée dans le *tenseur métrique* g

- celui du $\partial s^2 = g_{\mu\nu} \partial x_\mu \partial x_\nu$

- Idée la plus simple

$$g = T$$

mais cela

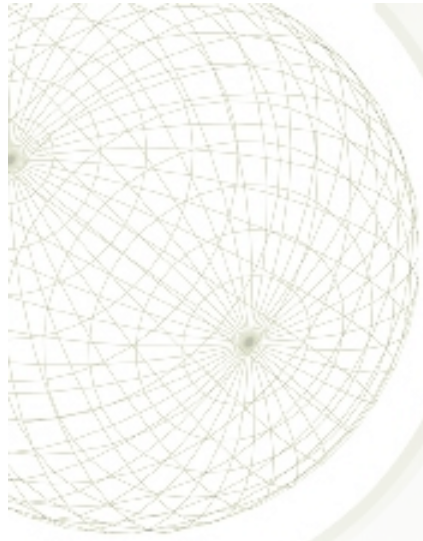
1. conduit à des incohérences mathématiques
2. ne redonne pas la théorie de Newton

- Meilleure idée : calculer à partir du tenseur métrique une fonction $G[g]$ adéquate

- Einstein y a passé des années
- Hilbert a ensuite trouvé une voie directe (via le principe de moindre action)

- \Rightarrow Équation d'Einstein

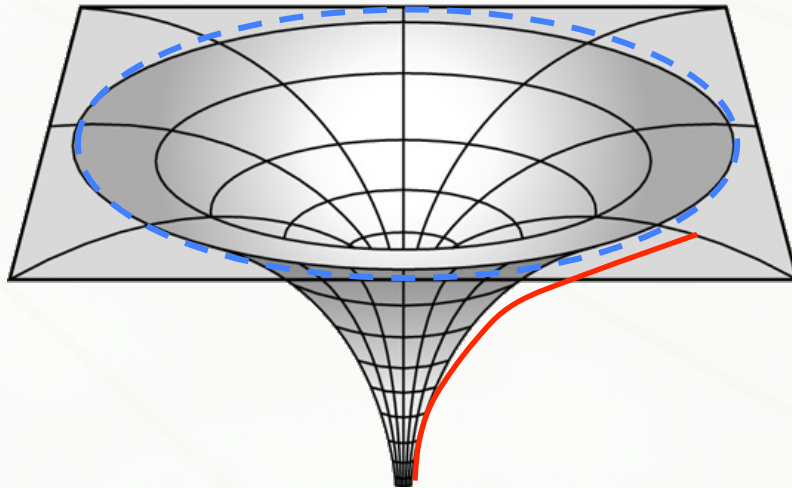
$$G[g] = T$$



GÉOMÉTRIE DE SCHWARZSCHILD

SCHWARZSCHILD ET LES SINGULARITÉS

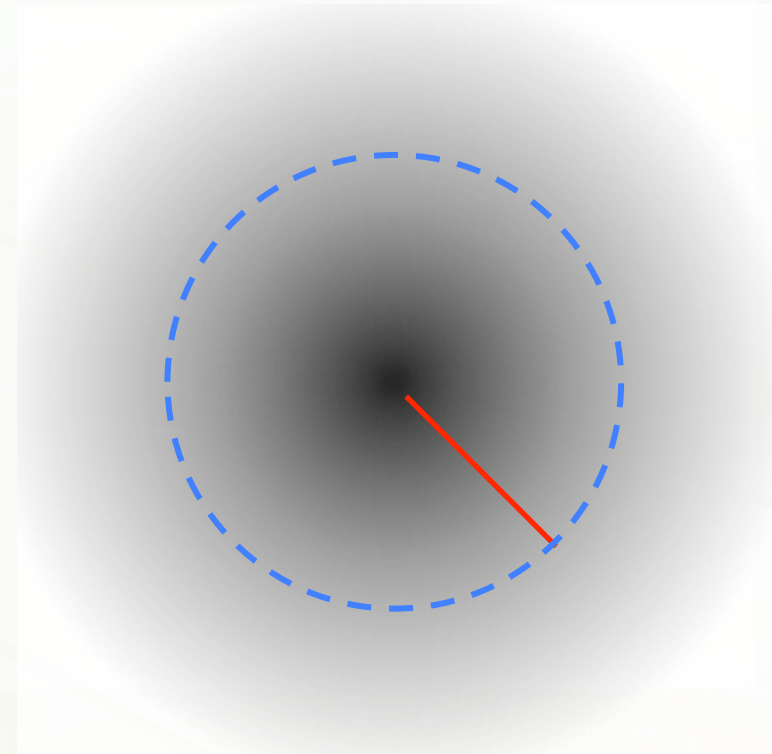
- Einstein a vérifié en 1915 que sa théorie reproduisait bien celle de Newton pour un champ faible
- K. Schwarzschild a donné en 1916 la solution générale pour une distribution de matière sphérique et limitée
 - la Terre, une planète, le Soleil, une étoile



- Pour une masse *ponctuelle*, la courbure devient **infinie** à l'origine

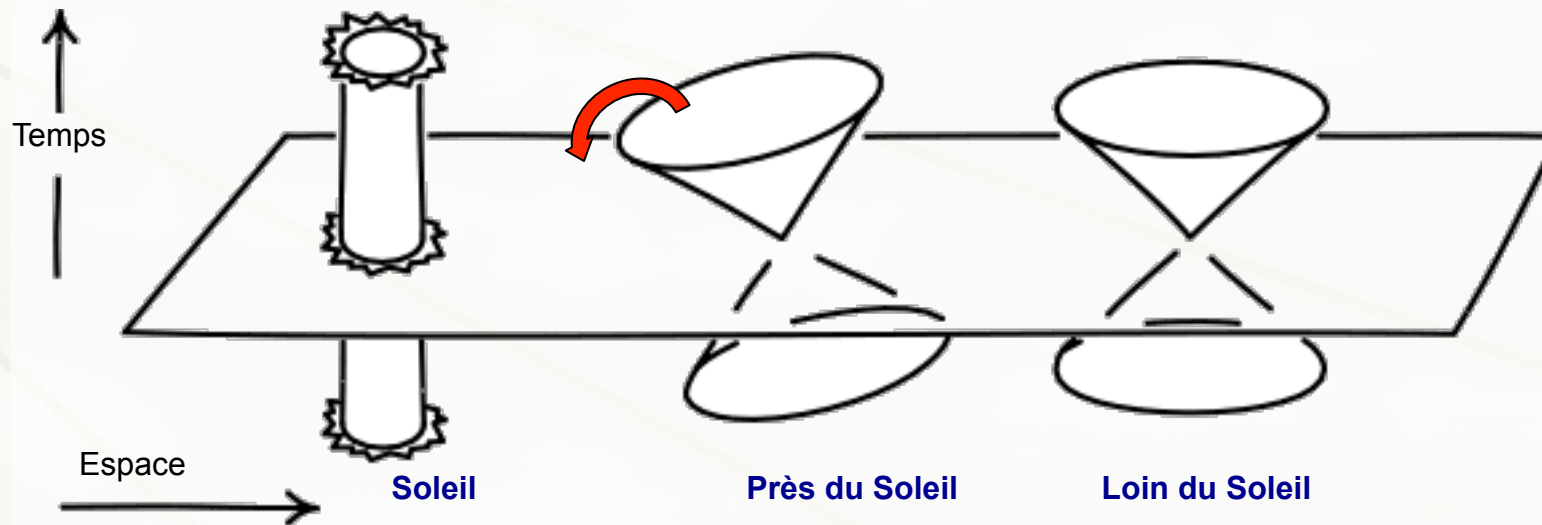
TROU NOIR

- Circonférence $\ll 2\pi$ Rayon

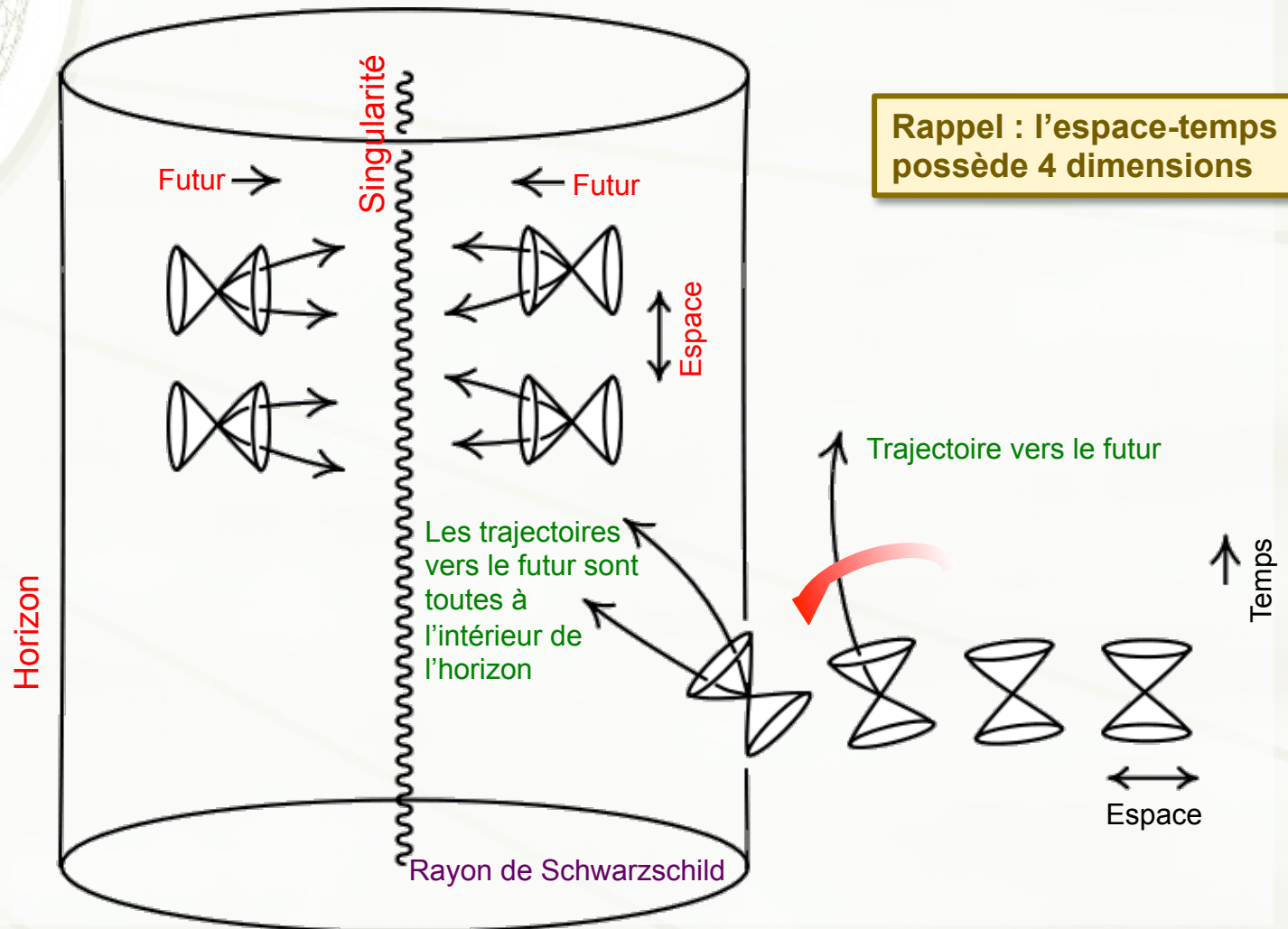


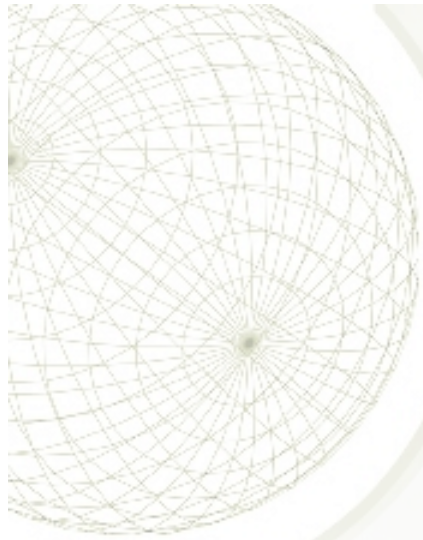
CAUSALITÉ

- Aucun signal ne peut se propager plus vite que la lumière
- ⇒ L'intérieur du cône de lumière est l'ensemble des événements causalement connectés à l'origine
- La déformation de l'espace-temps incline le cône de lumière **en direction de la source** de gravitation
- ⇒ quand la gravité devient très intense, le cône est tellement incliné qu'aucun signal ne peut s'éloigner ⇒ trou noir



ROTATION DES CÔNES DE LUMIÈRE





Merci de votre attention !

