Astro*physique*

15 – Espace, temps et géométrie

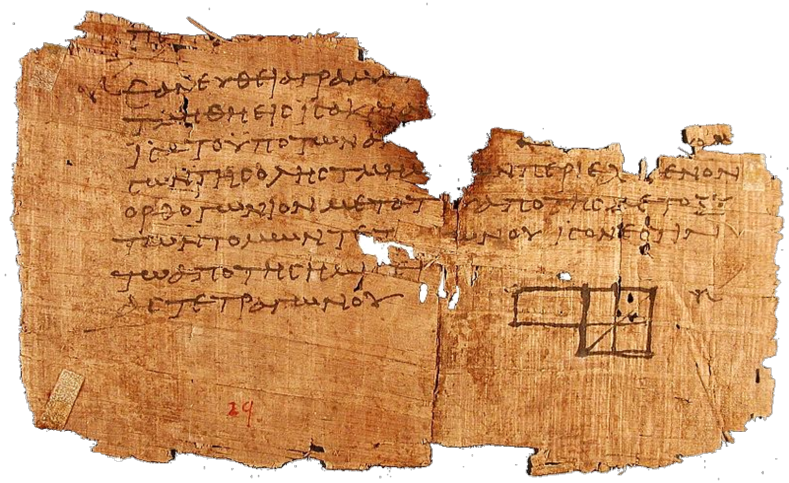
Alain Bouquet

Laboratoire AstroParticule & Cosmologie
Université Denis Diderot Paris 7, CNRS, Observatoire de Paris & CEA

GÉOMÉTRIE

Un long cheminement

- Euclide
  - Toute la géométrie (plane) se déduit de 5 postulats (+ règles de la logique)
  - 1 – il est toujours possible de relier 2 points par une droite
  - 2 – une droite peut toujours être prolongée (⇒ l'espace est infini)
  - 3 – un cercle peut avoir n'importe quel centre ou rayon
  - 4 – tous les angles droits sont égaux
  - 5 – postulat des parallèles

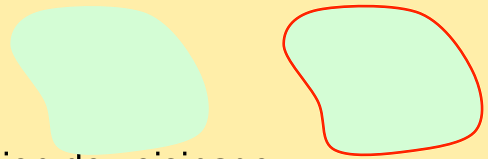


- Théologiens médiévaux
  - l'espace est une forme de Dieu
- ⇒ Newton
  - espace absolu, contenant universel et *sensorium Dei*
- Gauss, Bolyai, Lobatchevsky, Riemann : géométries non-euclidiennes

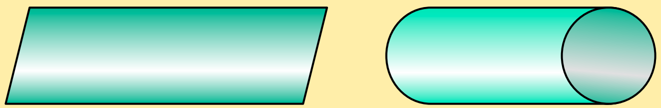
Géométrie

Topologie

- Topologie
  - Notion d'ouvert et de fermé



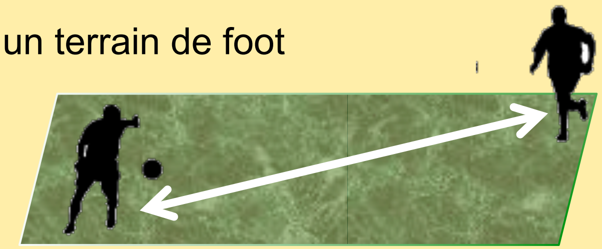
  - Notion de voisinage
  - Plan ≠ cylindre



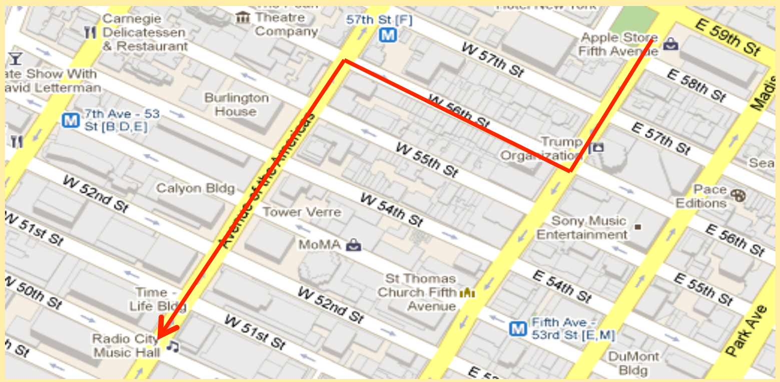
- Espaces avec des bords
- Espaces avec des trous

Métrique

- Notions de distance et d'angle
  - Plan = cylindre
- Distances
  - Sur un terrain de foot

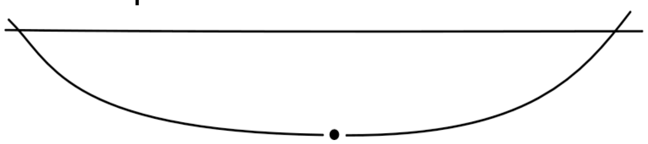


  - À Manhattan

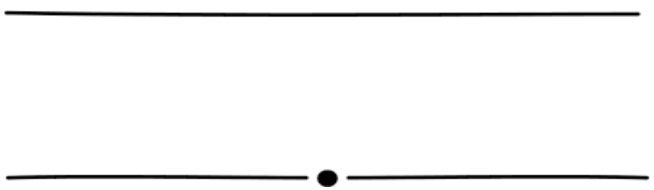


Géométrie non euclidienne

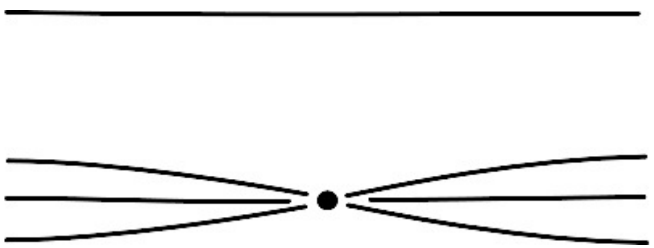
- Énoncé équivalent du 5° postulat : par un point extérieur à une droite on peut mener
  - zéro parallèle à cette droite



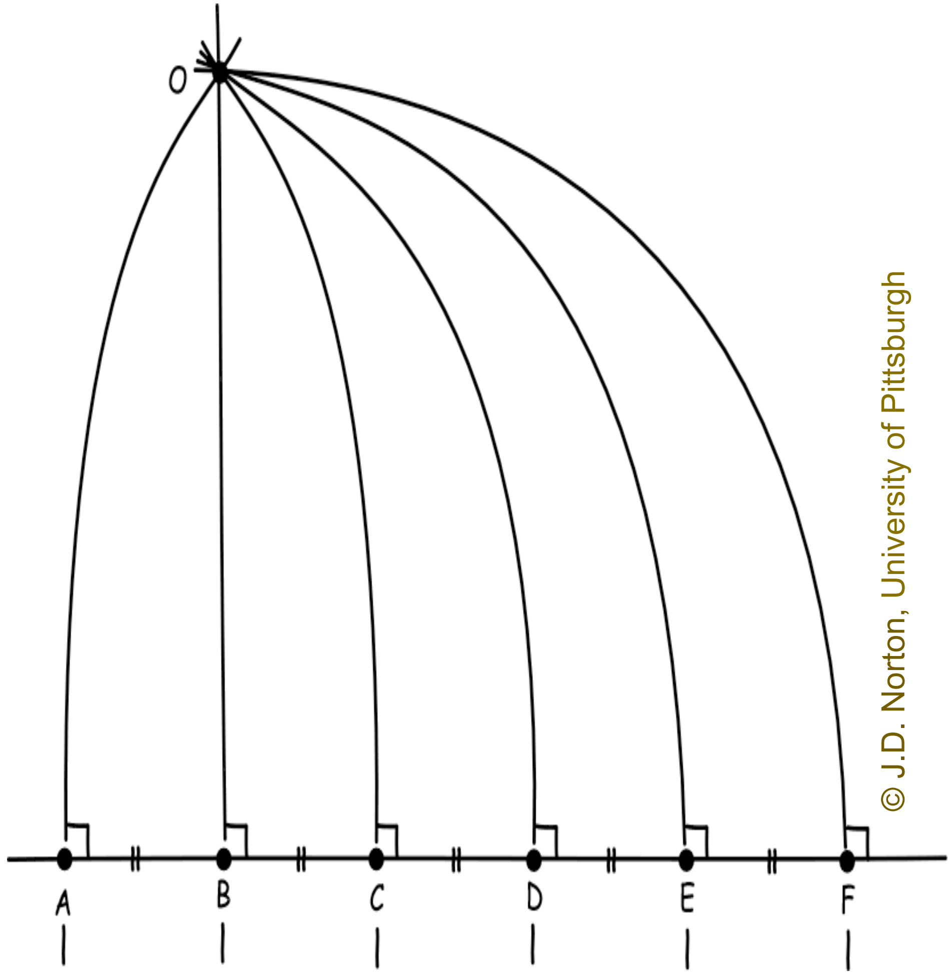
  - une parallèle à cette droite



  - une infinité de parallèles à cette droite

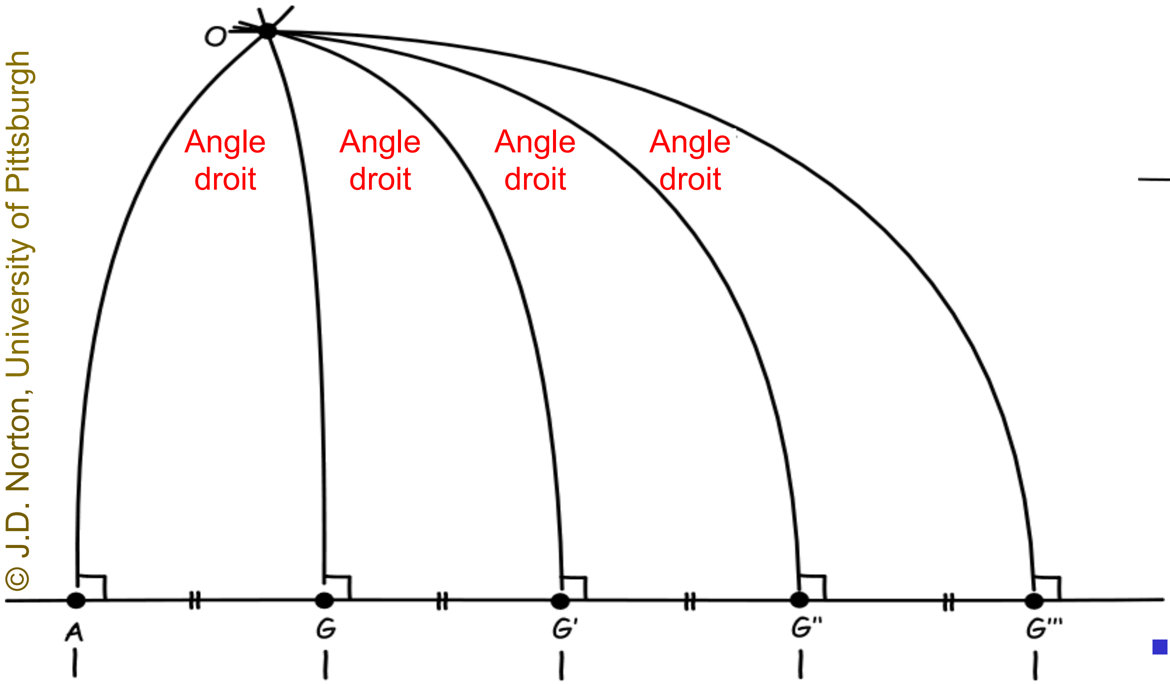


- Dans le premier cas

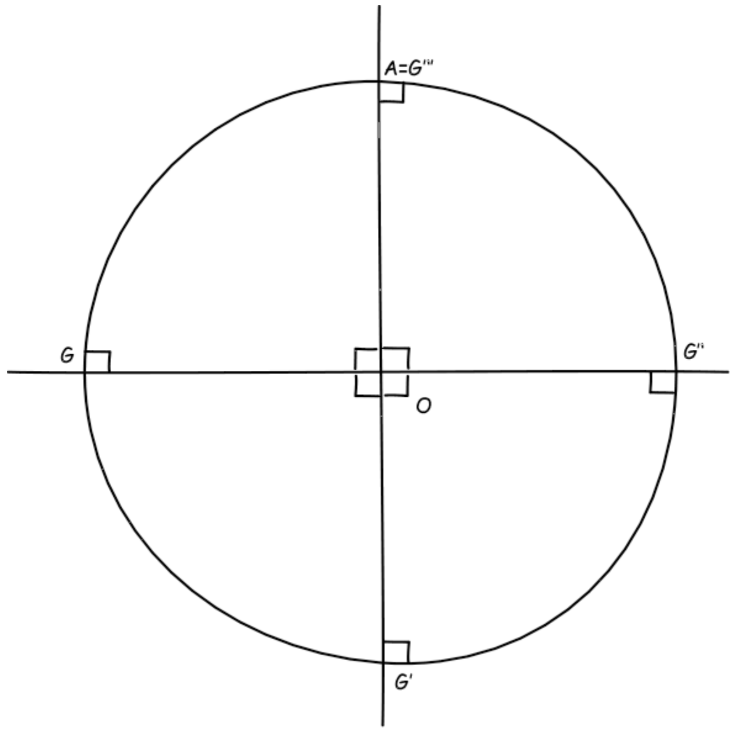


Géométrie sphérique

- L'angle AOG au sommet peut être un angle droit
- Mais alors :



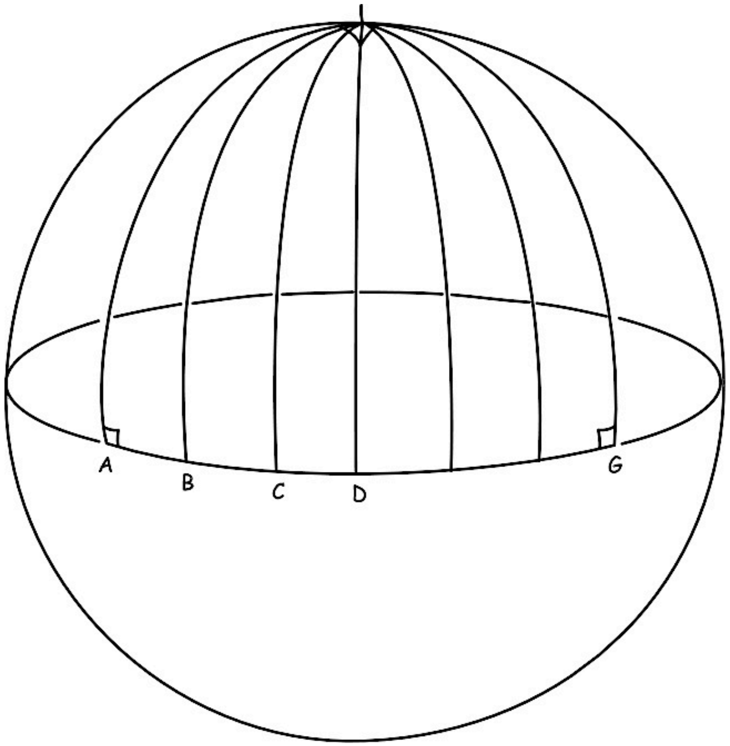
- On a en fait

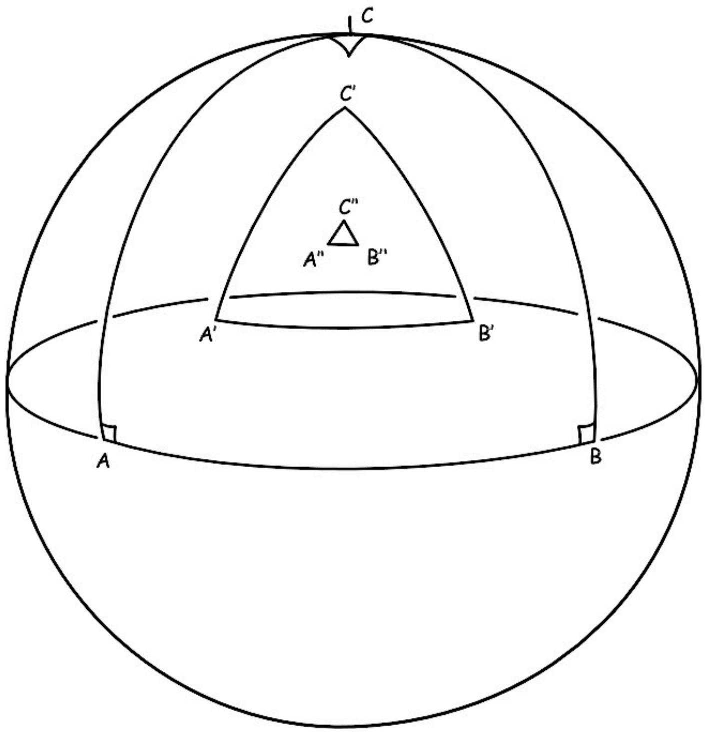


- avec identité des points A et G'''

Géométrie sphérique

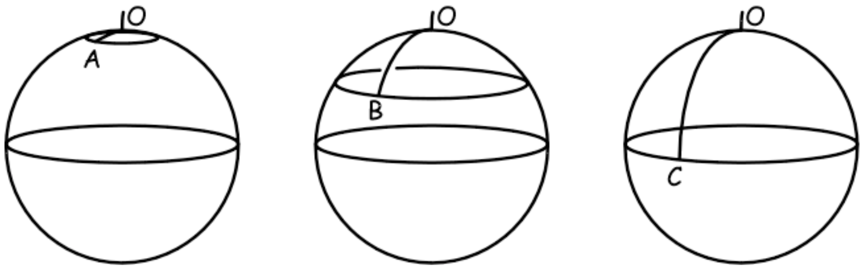
- Les lignes droites se referment sur elles-mêmes (arcs de grand cercle) A = G'''
- Il peut y avoir des triangles ayant trois angles droits
- Il existe des cercles (AGG'G''G''' par exemple) dont le périmètre est égal à 4 fois le rayon (et non 2π)



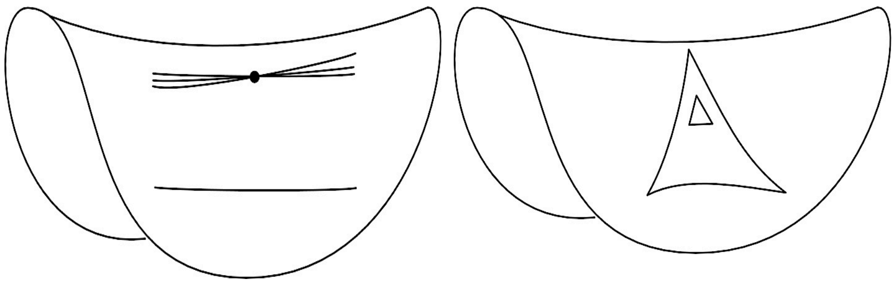


Espaces de courbure variable

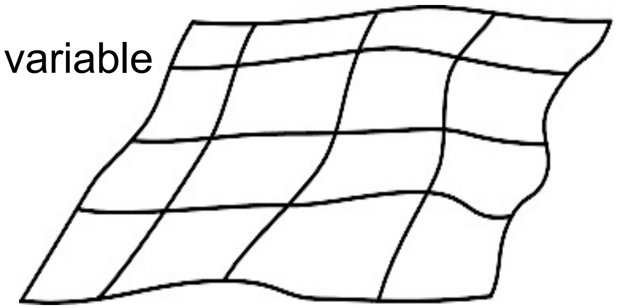
- Courbure positive



- Courbure négative

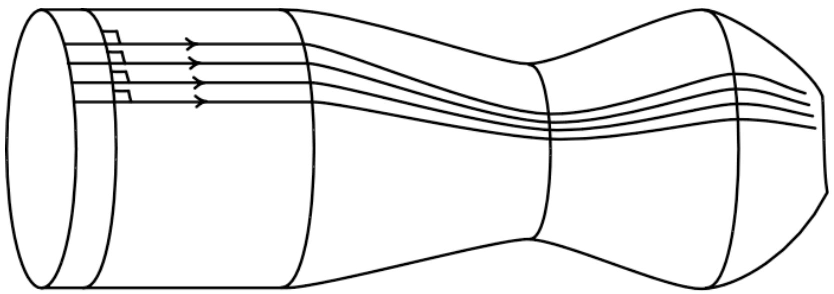


- Courbure variable



- **Déviation des géodésiques**

- et quand la courbure est variable :

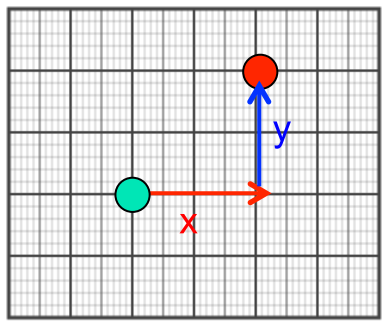


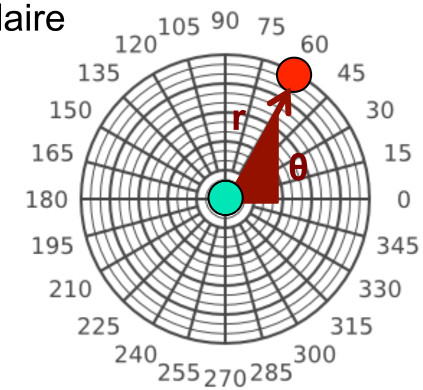
Coordonnées, cartes et atlas

- Coordonnées (Oresme, Descartes)
  - un point ⇔ une valeur numérique
  - $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ …
  - ou plusieurs valeurs numériques
- ⇒ notion de dimension de l'espace
  - 1 nombre ⇒ 1 dimension
  - 2 nombres ⇒ 2 dimensions
    - plan
    - cylindre
    - sphère
    - **localement identiques**
  - généralisable à N dimensions
  - et généralisable à des « espaces » très différents (espaces de fonctions par ex.)

- Carte
  - association entre les points d'un espace et un jeu de coordonnées

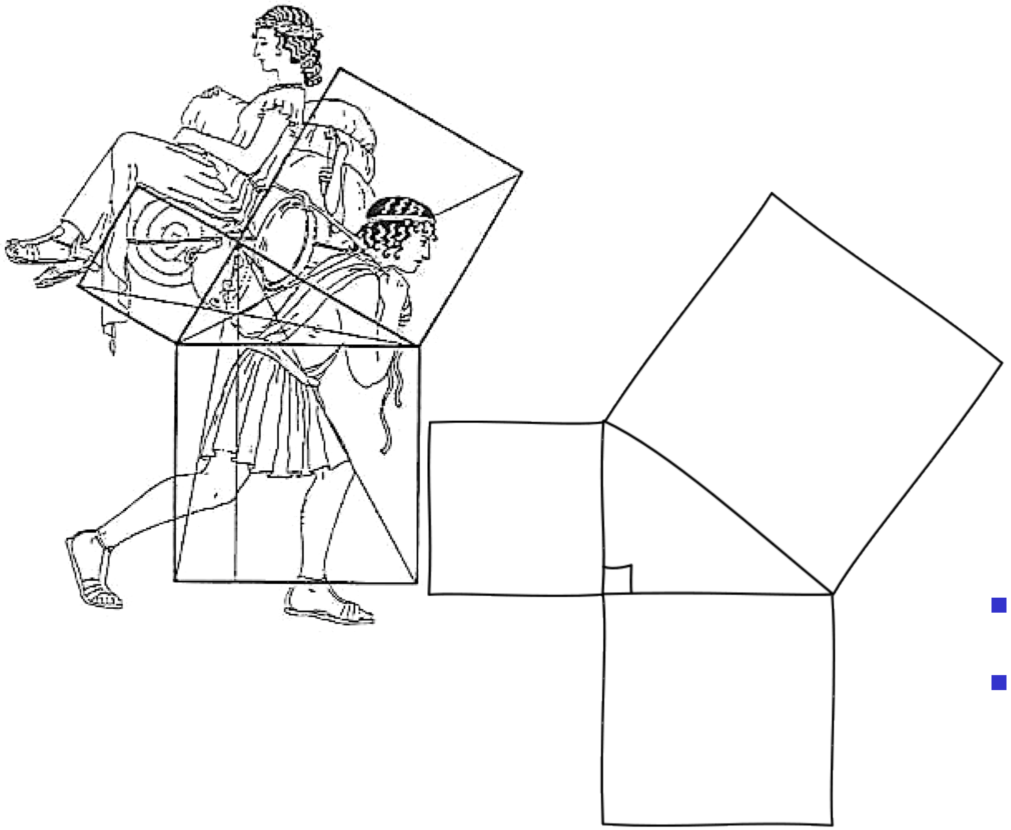
    Espace ⇔ $\mathbb{R}^N$
- Atlas
  - un ensemble de cartes couvrant tout l'espace
  - et se recouvrant partiellement
- Changement de coordonnées
  - cartésien ⇒ polaire



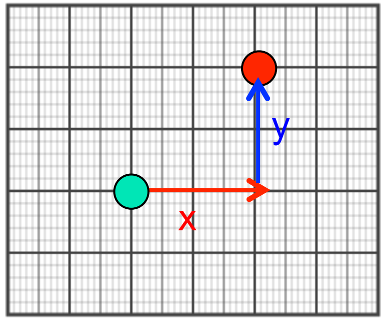


Pythagore

- Théorème de Pythagore



- Distance entre deux points



  - L'expression dépend des coordonnées

    $D^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ cartésiennes

    $D^2 = \Delta r^2 + r^2\,\Delta\theta^2$ polaires

- Généralisable en N dimensions
- La distance dépend du chemin suivi
  - Plus courte distance ≡ ligne droite (ou *géodésique*)
- Plus courte ⇔ plus droite ?

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

- Généralisation du théorème de Pythagore

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

- Poids différents

$$\Rightarrow ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{yy} dy^2$$

- Poids variables avec la position

$$\Rightarrow ds^2 = g_{xx}(x,y) dx^2 + g_{yy}(x,y) dy^2$$

- N coordonnées $\{x_1, x_2 \ldots\}$

$$\Rightarrow ds^2 = \Sigma\, g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

- $\Rightarrow$ le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ détermine la géométrie (distances et angles) de l'espace
  - mais pas sa topologie globale

- Exemples
- Plan (euclidien)
  - coordonnées cartésiennes
  - $ds^2 = dx^2 + dy^2$
  - $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - coordonnées polaires
  - $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$
  - $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$
- Sphère (non-euclidienne)
  - Coordonnées sphériques $\{\theta, \varphi\}$
  - $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$
  - $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$
- $\Rightarrow$ il n'est pas évident de savoir si un espace est ou non euclidien juste en regardant le tenseur métrique
- $\Rightarrow$ tenseurs de Riemann et de Ricci

MOUVEMENT ET RELATIVITÉ

Mouvements inertiels et accélérés

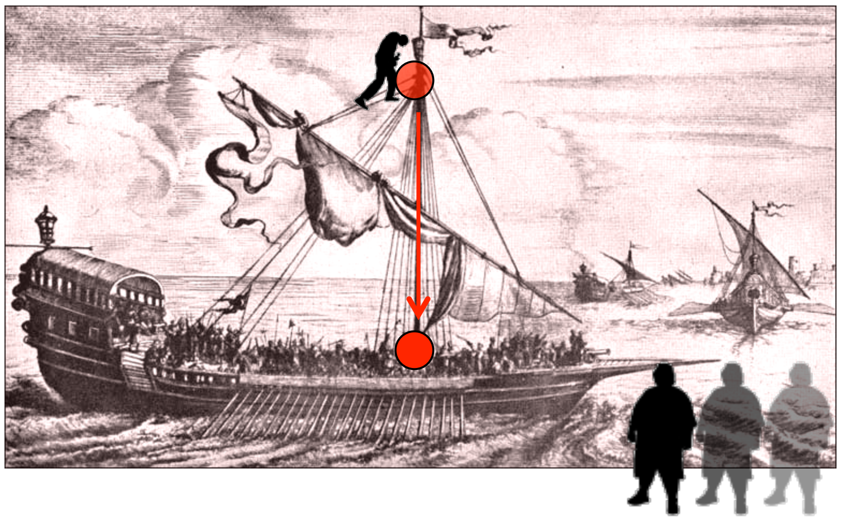
- Un mobile qui n'est soumis à aucune force se déplace
  - en ligne droite
  - à vitesse constante
- C'est un mouvement inertiel
- Pas si simple !
  - vitesse constante par rapport à quoi ?
  - ligne droite par rapport à quoi ?
- Réponse de Newton : par rapport à l'espace absolu

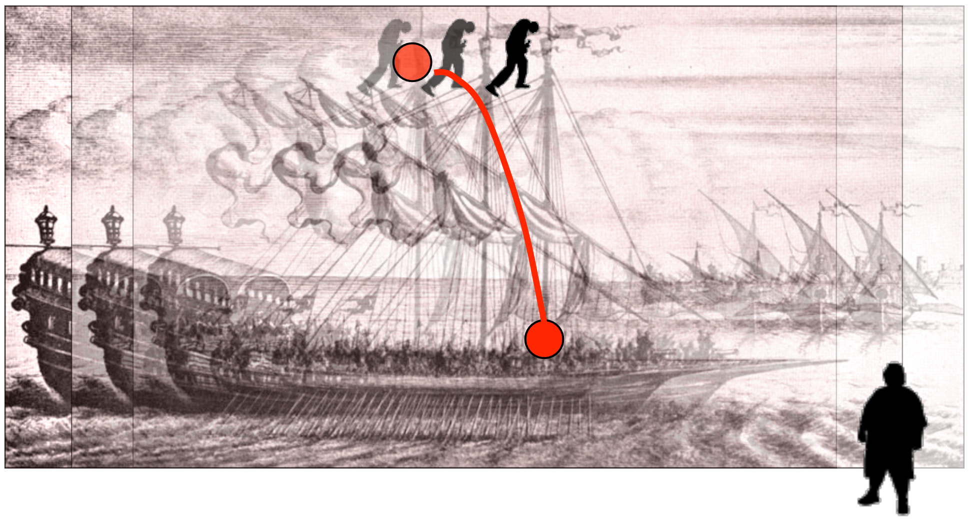
Référentiel absolu
- préexistant à la matière (Newton)
- défini par la distribution de matière (Mach)

- Un mobile soumis à une force F subit une accélération $\gamma = F/m$
  (m étant la masse inertielle du mobile)
- À un mobile en mouvement inertiel on peut attacher un référentiel (inertiel bien sûr)
  - 3 directions d'espace
  - 1 direction du temps
- Et on passe d'un référentiel inertiel à un autre par
  - une translation spatiale
  - et/ou une rotation spatiale
  - une translation temporelle
  - (transformations de Galilée)

Invariance galiléenne

- Les lois physiques sont identiques dans tous les référentiels inertiels
- ⇒ invariance des lois physiques par transformation de Galilée
- ⇒ il est impossible de détecter si un référentiel est en mouvement uniforme par rapport à l'espace absolu
- ⇒ principe de relativité (galiléenne)





Un certain Einstein

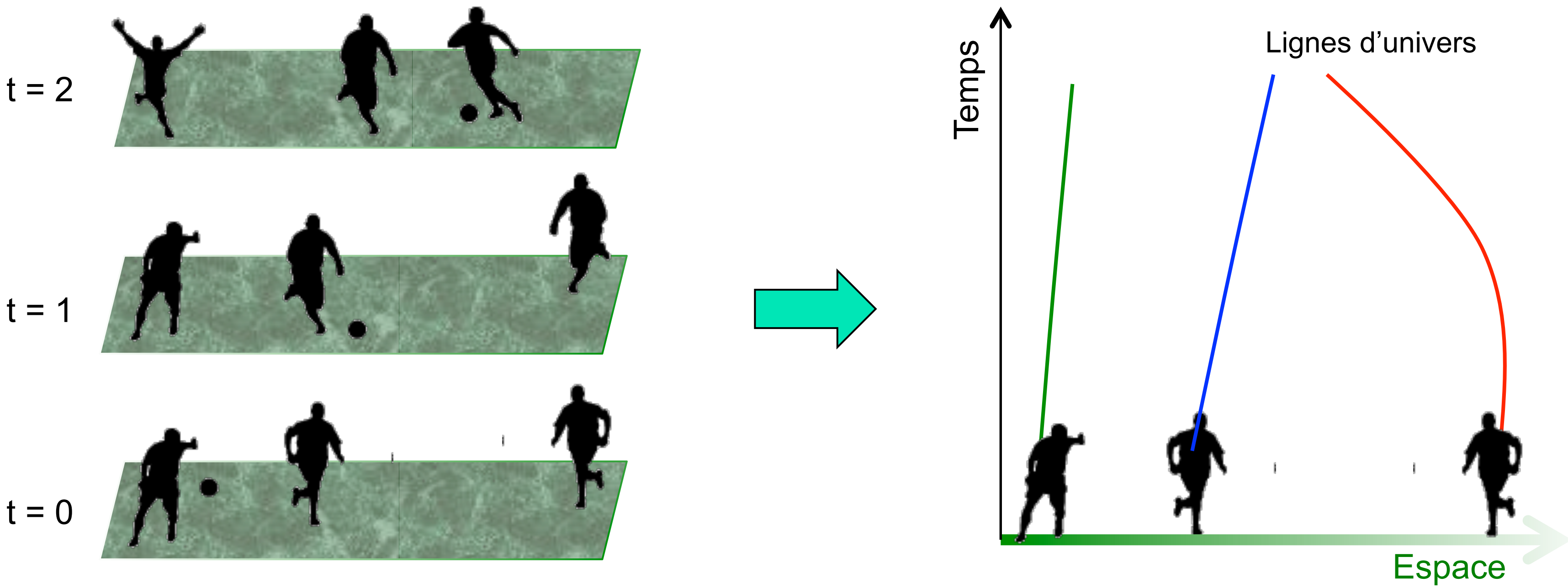
- Le principe de relativité (galiléenne) implique qu'il n'existe pas de vitesse absolue
- Mais l'électrodynamique de Maxwell implique que la vitesse *c* des ondes électromagnétiques soit une constante fondamentale de la nature

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \,.$$

- Autrement dit, Newton et Maxwell sont incompatibles

- Einstein opta pour Maxwell (après mûre réflexion)
- ⇒ la vitesse *c* de la lumière est identique dans tous les référentiels
- Explique au passage le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley pour détecter un « vent d'éther »
- Transformations de Galilée ⇒ transformations de Lorentz

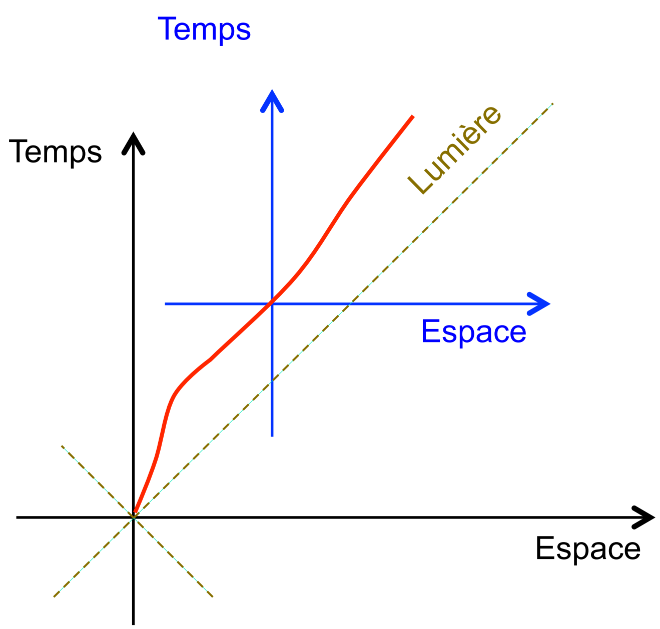
Diagrammes d’espace-temps

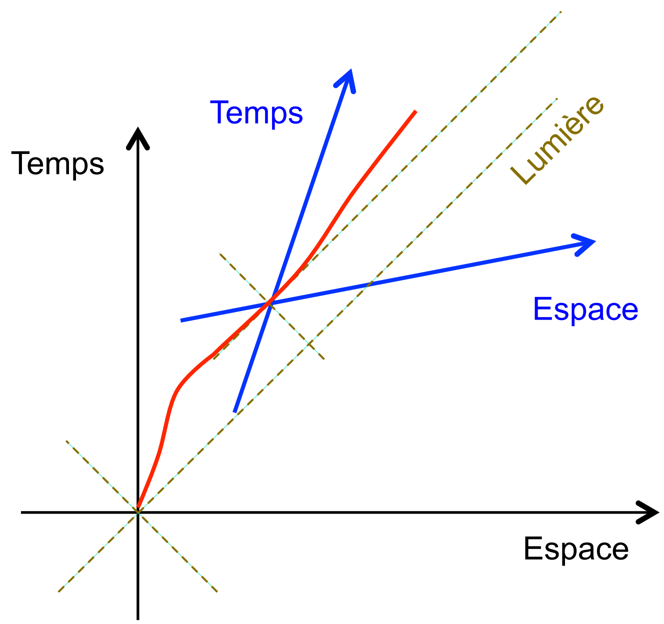


Changements de référentiel

- Transformation de Galilée
  - conservation des distances spatiales
  - conservation des intervalles de temps
- ⇒ Espace-temps de Newton

- Transformation de Lorentz
  - mêle espace et temps
  - conservation des intervalles spatio-temporels $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$
- ⇒ Espace-temps de Minkowski (1908)



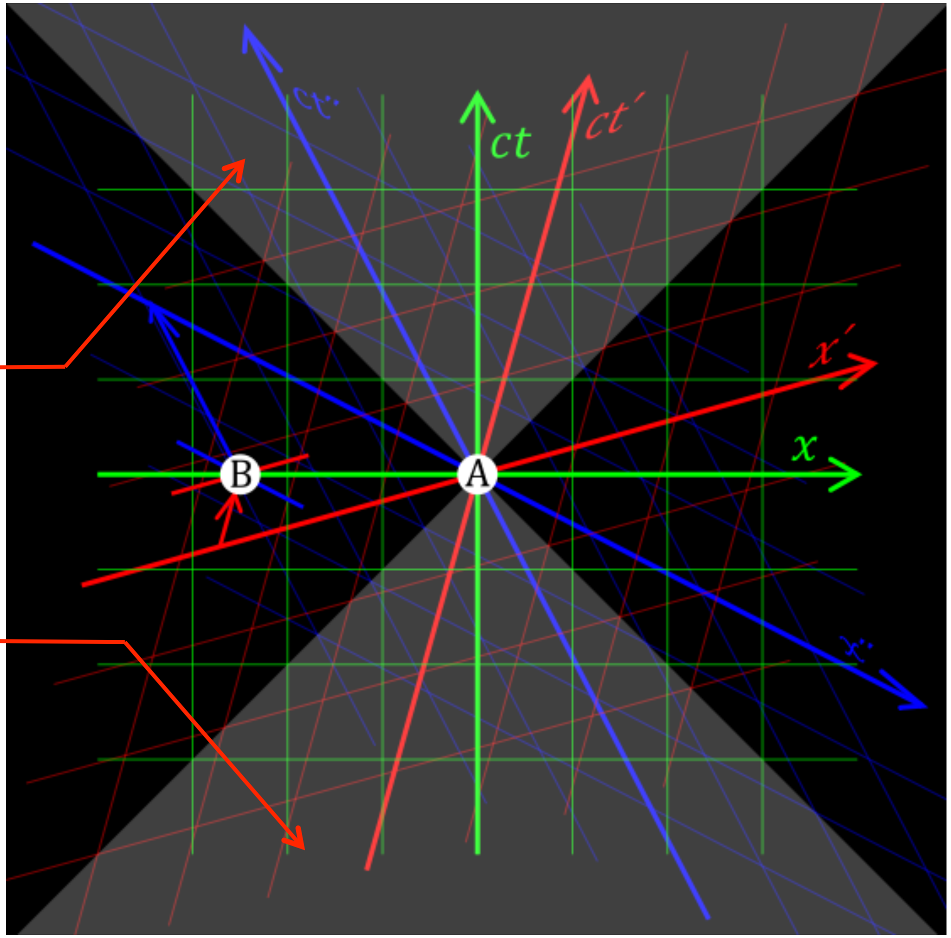


Simultanéité et causalité

- Deux événements (≡ position+instant) A et B sont
  - simultanés dans le référentiel vert
  - A précède B dans le rouge
  - A suit B dans le bleu

- L'événement B ne peut être causé par A que s'il se situe dans son cône de lumière futur

- L'événement B ne peut être la cause de A que s'il se situe dans son cône de lumière passé



GRAVITATION

Principe d'équivalence

- Galilée à la Tour penchée de Pise

- Tests (Eötvös…)

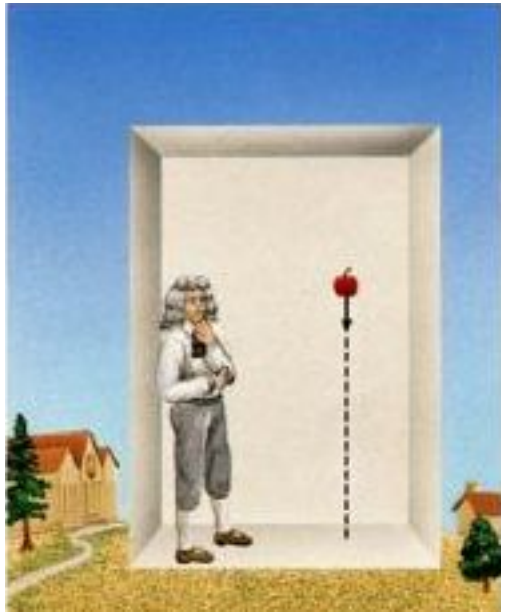
  $M_{inertielle}/M_{grave} = 1 \pm 10^{-16}$

- Accélération pure ⇒ analogue à la force centrifuge ?
- Comment faire disparaître la gravitation ?
  - « Expérience » de l'ascenseur

Tous les corps ont la même accélération dans un champ de gravitation *quelle que soit leur masse ou leur composition*

Un ascenseur bien étonnant

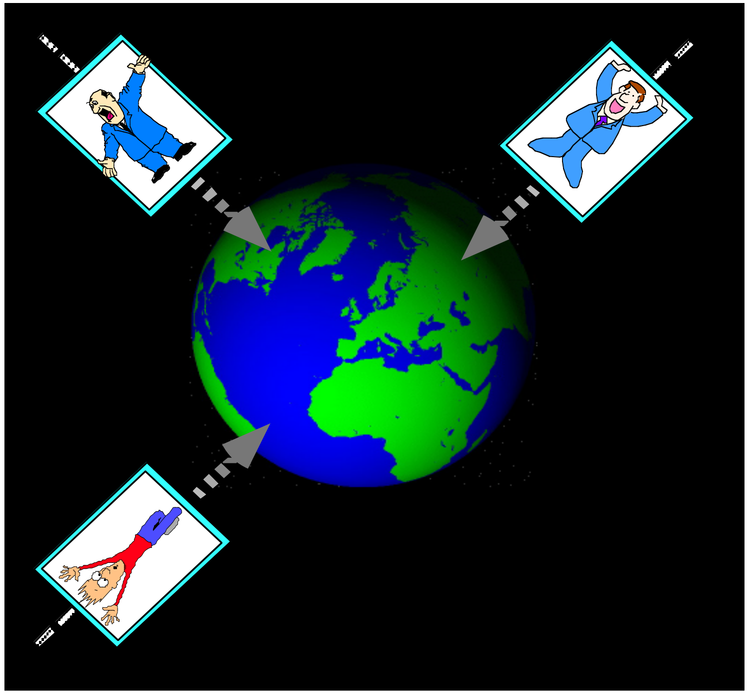
- Comment faire la différence ?



Gravitation

Accélération

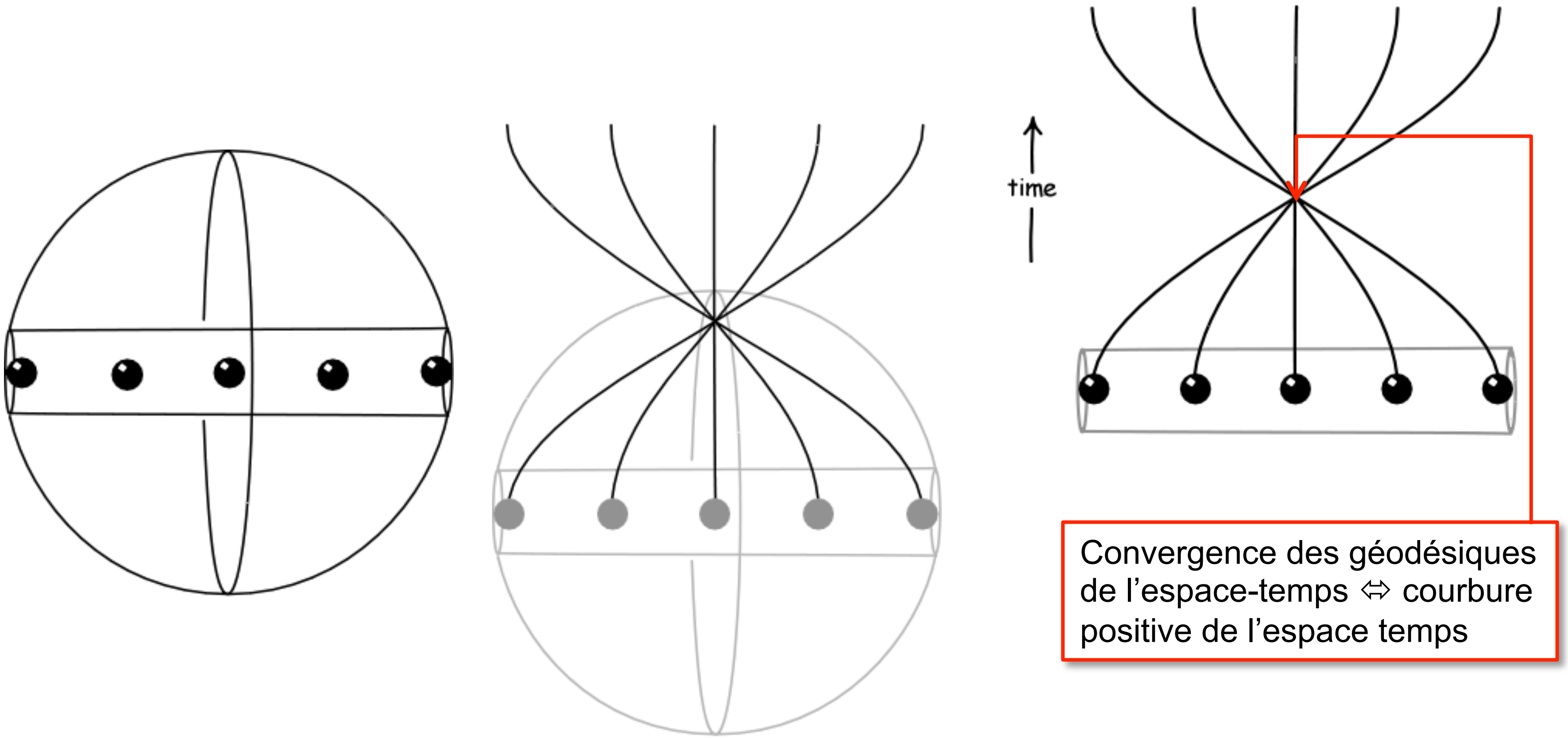
- Mais l'équivalence n'est que locale



- ⇒ courbure de l'espace-temps

Gravitation et géodésiques

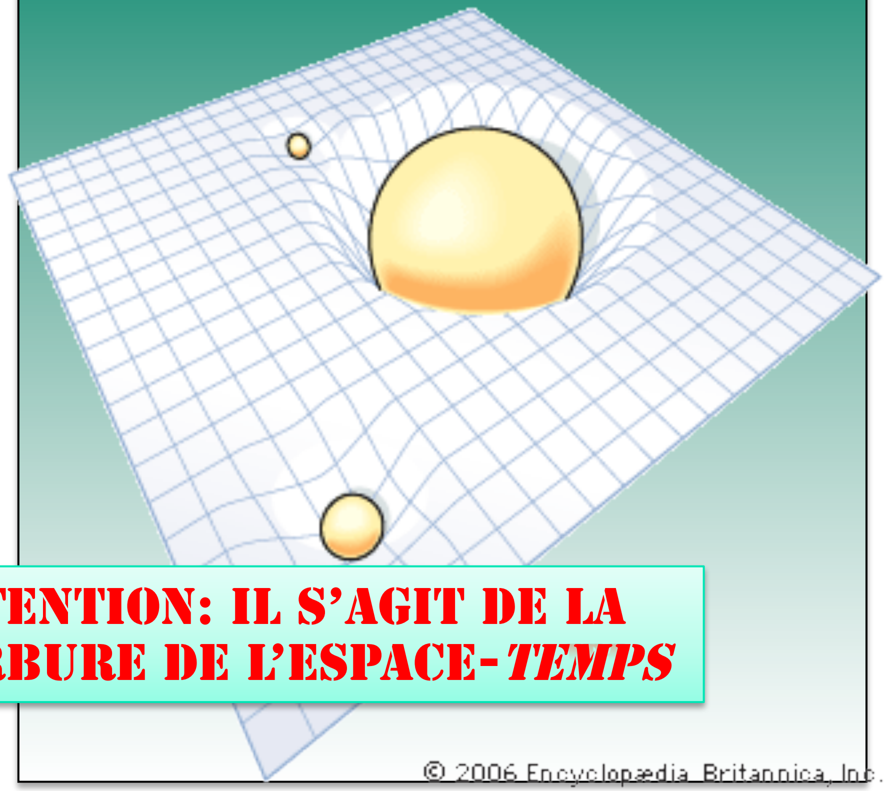
- Imaginons des billes traversant librement la Terre sous le seul effet de la gravitation



La relativité générale en deux ph(r)ases

- L'espace-*temps* possède une courbure qui influe sur le déplacement de la matière et de la lumière

- La présence de matière influe sur la courbure de l'espace-*temps*



ATTENTION: IL S'AGIT DE LA COURBURE DE L'ESPACE-*TEMPS*

Relativité générale

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R - \Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Tenseur de courbure (Ricci)

Constante cosmologique

Tenseur énergie-impulsion

Construit à partir du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées

$$\left(\begin{array}{c|ccc}
\text{densité d'énergie} & \text{flux d'énergie} & \text{flux d'énergie} & \text{flux d'énergie} \\
\hline
\text{flux d'énergie} & \text{pression} & \text{cisaillement} & \text{cisaillement} \\
\text{flux d'énergie} & \text{cisaillement} & \text{pression} & \text{cisaillement} \\
\text{flux d'énergie} & \text{cisaillement} & \text{cisaillement} & \text{pression}
\end{array}\right)$$

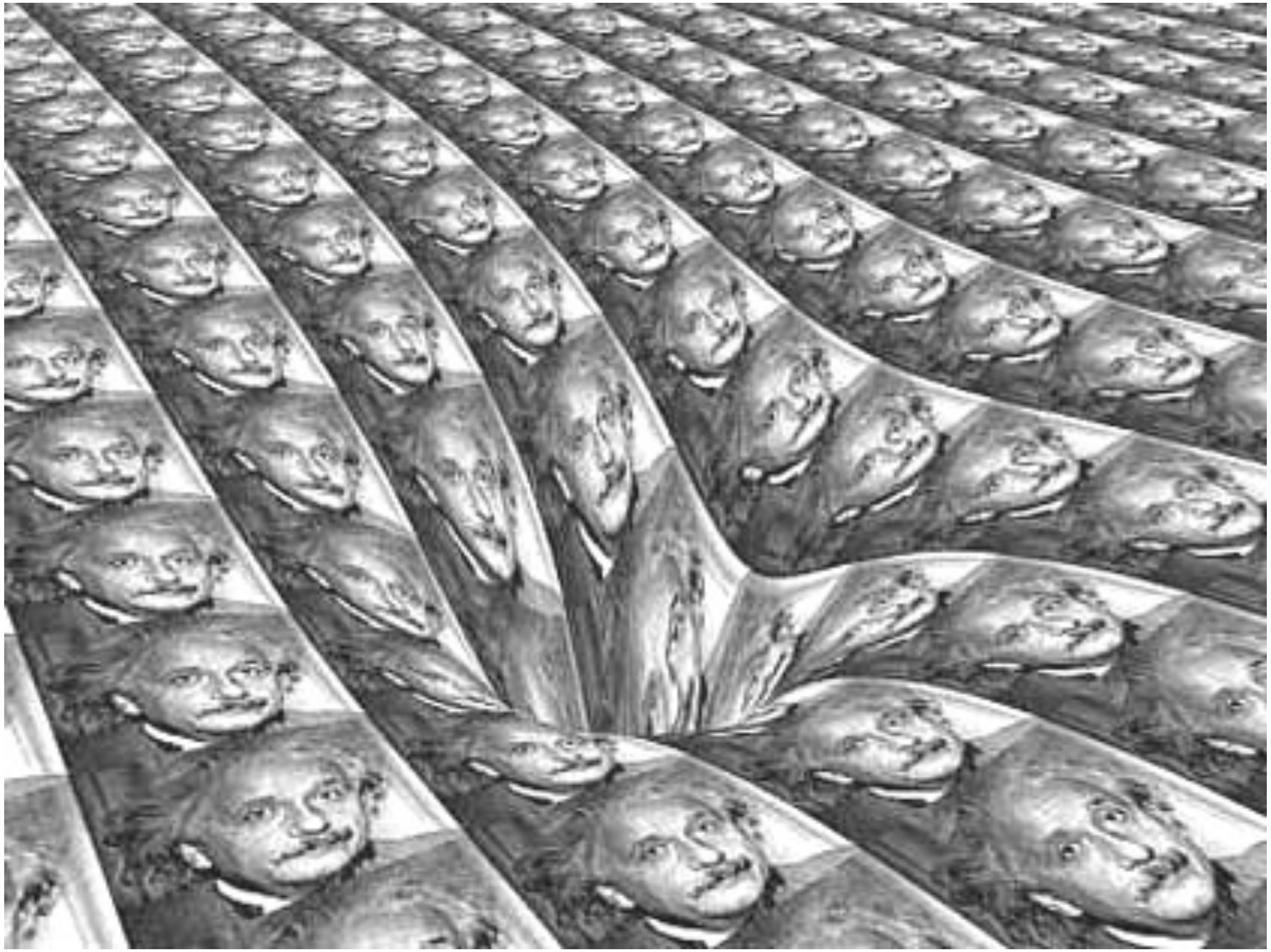
Quand doit-on utiliser la relativité générale ?

- Masse M et taille caractéristique R
  ⇒ vitesse V donnée par $V^2 \approx GM/R$
- V << c ⇔ Newton plutôt qu'Einstein
- Terre
  - $V_{libération}$ (Terre) = 11 km/s ~ 3×10^{-5} c
  - ⇒ effets relativistes très faibles
  - Expérience de Pound et Rebka
  - GPS

- Étoile
  - $V_{libération}$ (Soleil) = 617 km/s ~ 2×10^{-3} c
  - ⇒ déviation des rayons lumineux
  - ⇒ décalage gravitationnel vers le rouge
  - $R_{Schwarzschild} = 2\,G\,M / c^2$
  - M = 1 Ms ⇒ R_S = 3 km
  - ⇒ important pour les étoiles à neutrons
  - **ET LES TROUS NOIRS !**
- Univers
  - Univers primordial (⇒ expansion)
  - Aujourd'hui : seulement à très grande échelle (> amas de galaxies) ⇒ expansion

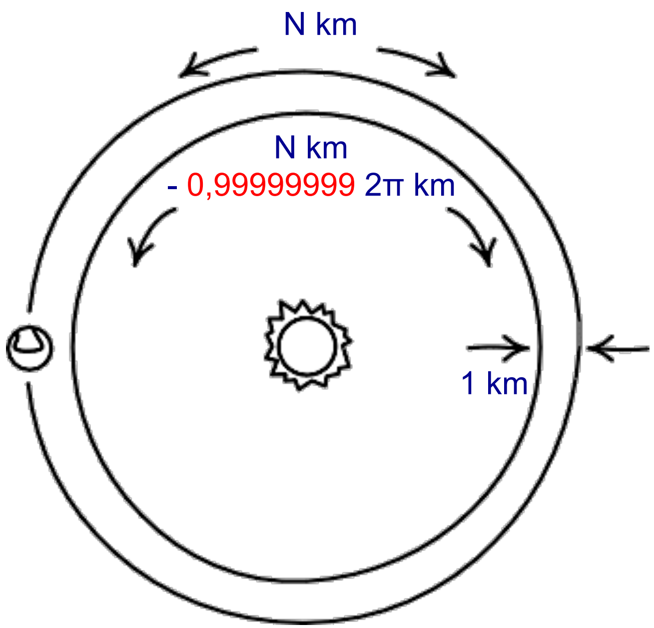
GÉOMÉTRIE DE SCHWARZSCHILD

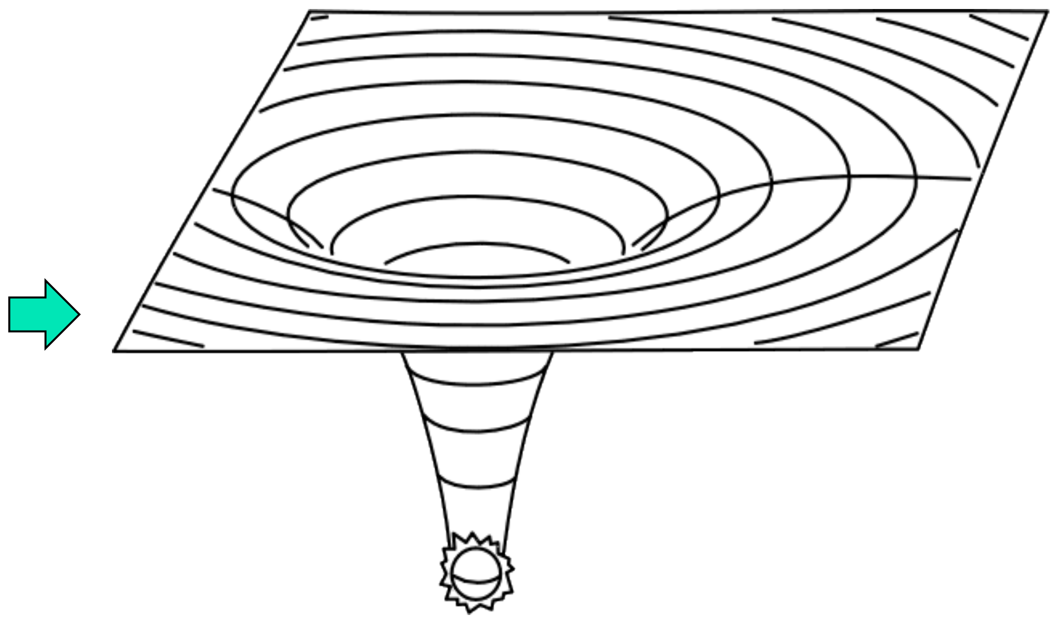
Schématiquement



Masse sphérique

- Courbure positive de l'espace
  - ⇔ le périmètre d'un cercle est inférieur à 2π rayon



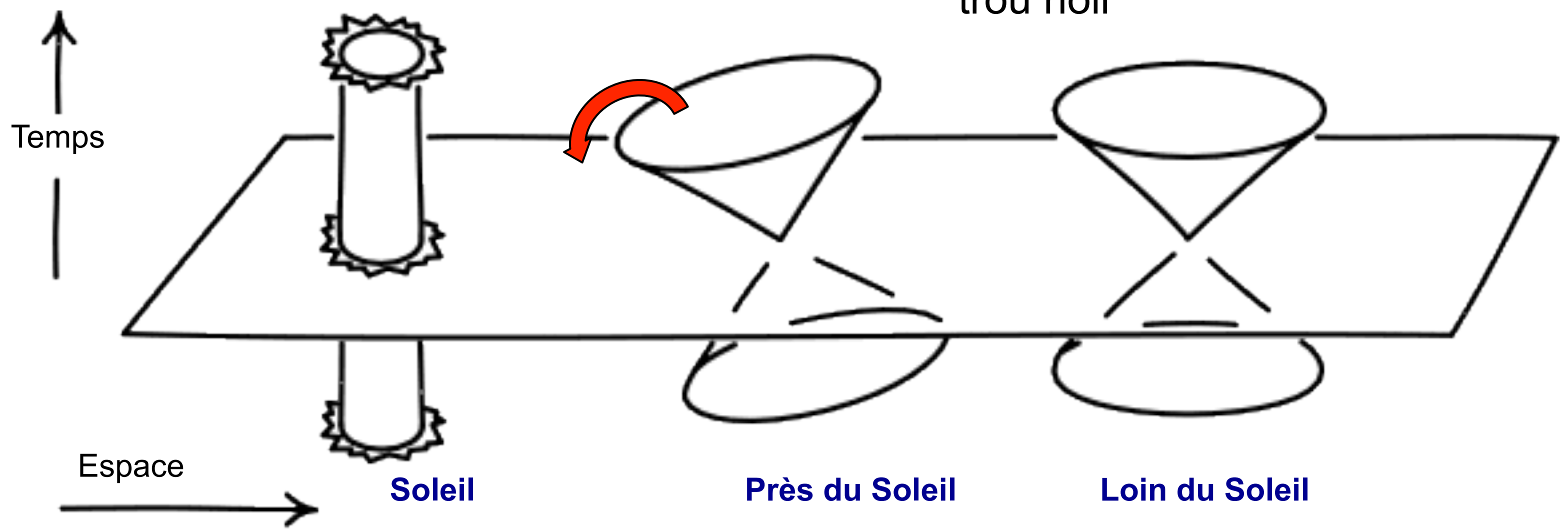


- Trompeur : courbure de l'espace-*temps*

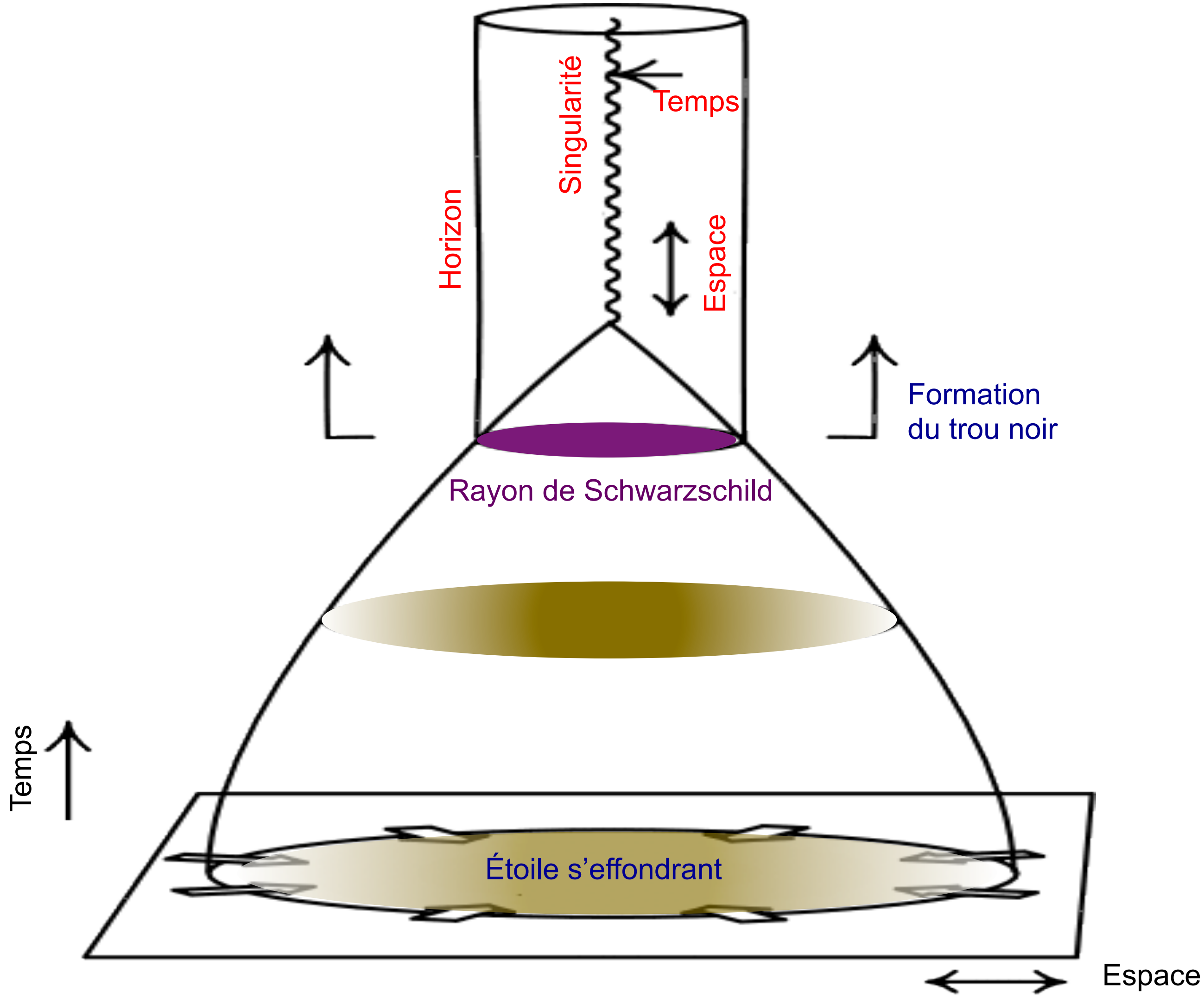
Causalité

- Aucun signal ne peut se propager plus vite que la lumière
- ⇒ L'*intérieur* du cône de lumière est l'ensemble des événements causalement connectés à l'origine

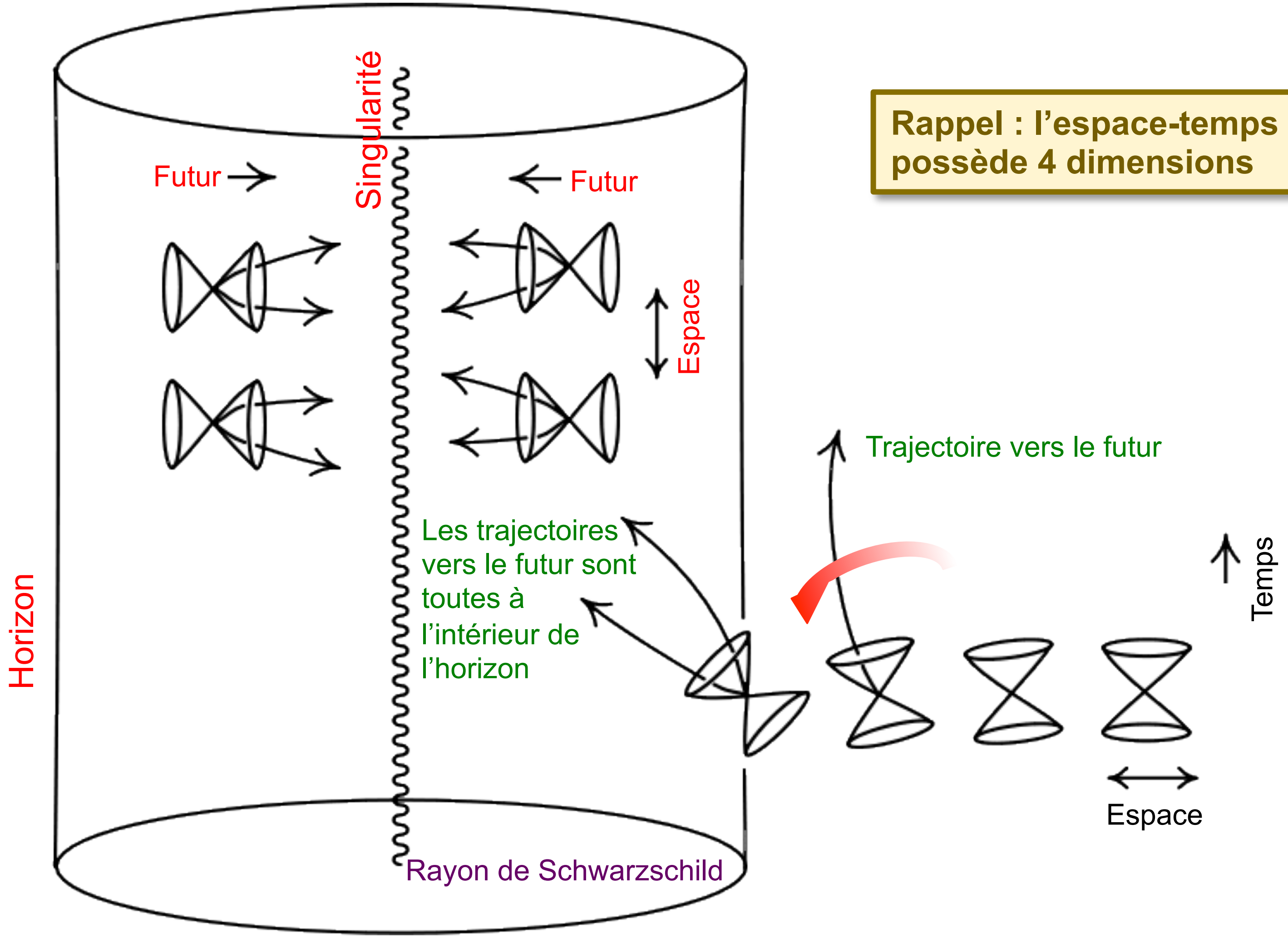
- La déformation de l'espace-temps incline le cône de lumière en direction de la source de gravitation
- ⇒ quand la gravité devient très intense, le cône est tellement incliné qu'aucun signal ne peut s'éloigner ⇒ trou noir



L'effondrement d'une étoile en trou noir



Rotation des cônes de lumière



Rappel : l'espace-temps possède 4 dimensions

GÉOMÉTRIE DE ROBERTSON-WALKER

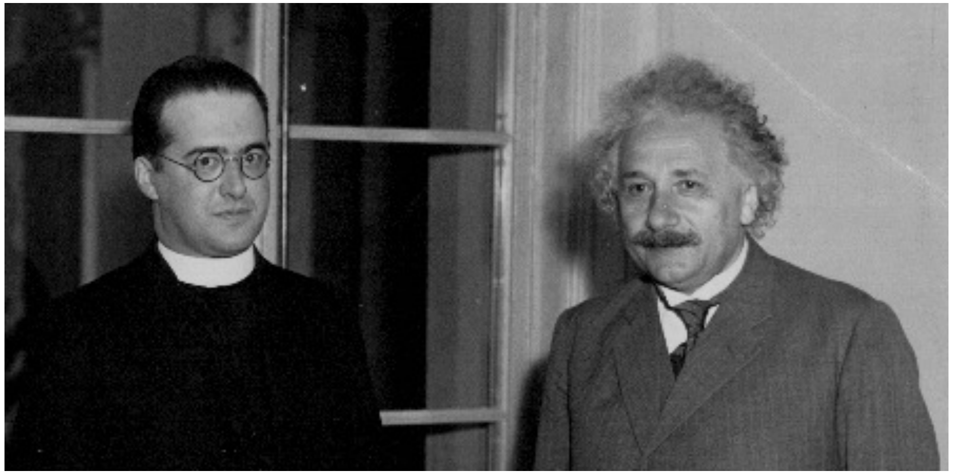
Un *espace* homogène et isotrope

- A.A. Friedman (1922)
  - Univers en expansion
  - Critiques virulentes d'Einstein
- G. Lemaître (1927)
  - Redécouverte de l'expansion
  - Appuyée sur les travaux de Slipher et Hubble
- Robertson et Walker (1935)
  - Forme générale, indépendamment de la relativité générale
- Distance

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,(dr^2 + r^2\, d\Omega^2\,)$$

Paramètre d'échelle

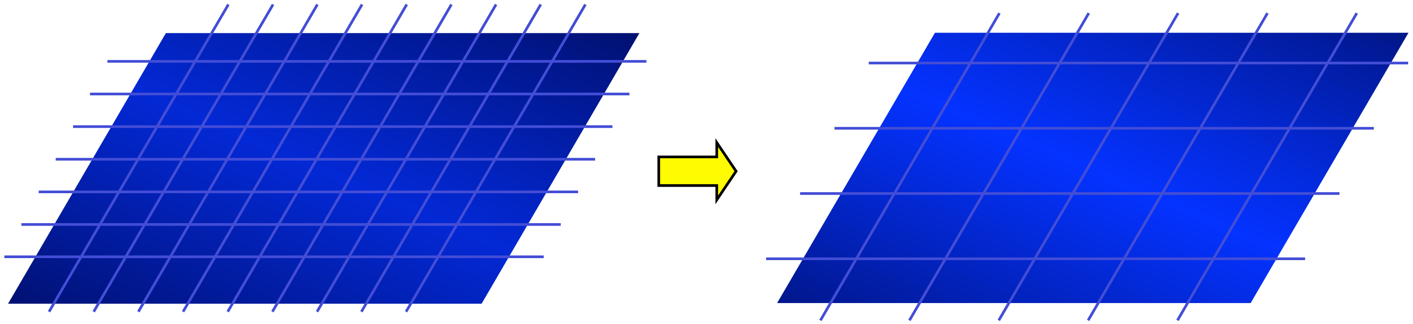
C'est la distance habituelle dans l'espace « euclidien »



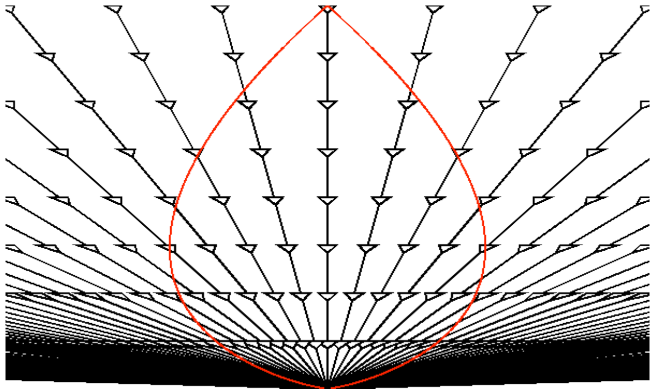
- Un espace-*temps* homogène et isotrope ?
  - A. Einstein (1917)
  - W. de Sitter (1917)
  - F. Hoyle (1948)
  - *incompatible avec les observations*

Un univers en expansion

- Une densité uniforme de masse
  - ⇒ une courbure spatiale partout identique
  - mais une courbure spatio-temporelle = dilatation des distances



- un cône de lumière qui se referme dans le passé :



- ⇒ solution non-statique
- décrivant le modèle du big bang

Merci de votre attention !