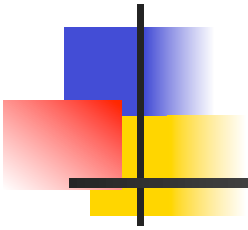


# Astrophysique

## 3 – La gravitation



Alain Bouquet

Laboratoire AstroParticule & Cosmologie

Université Denis Diderot Paris 7, CNRS, Observatoire de Paris & CEA

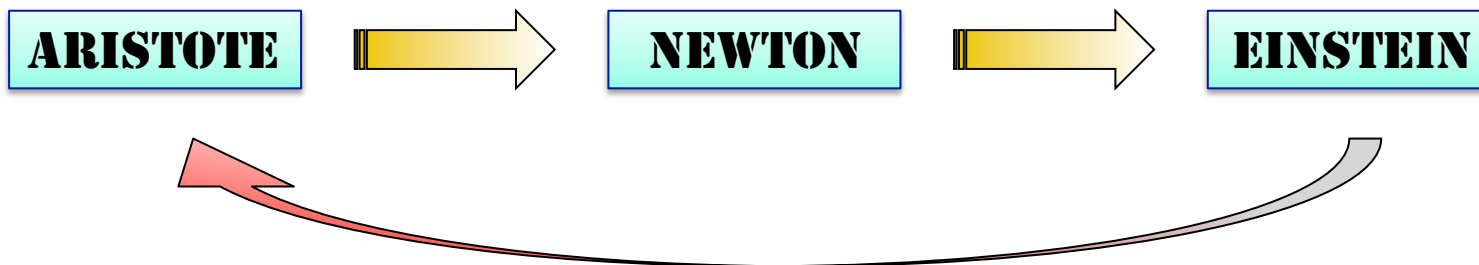


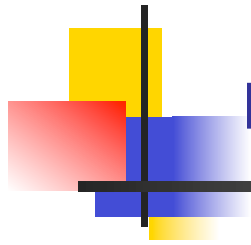


# Espace, temps, gravitation

---

- Les notions
  - d'espace
  - de temps
  - et de gravitation
- sont étroitement liées
  - dans leurs usages dans la physique moderne (la relativité générale en particulier)
  - mais aussi dans leur lente maturation réciproque au cours des siècles





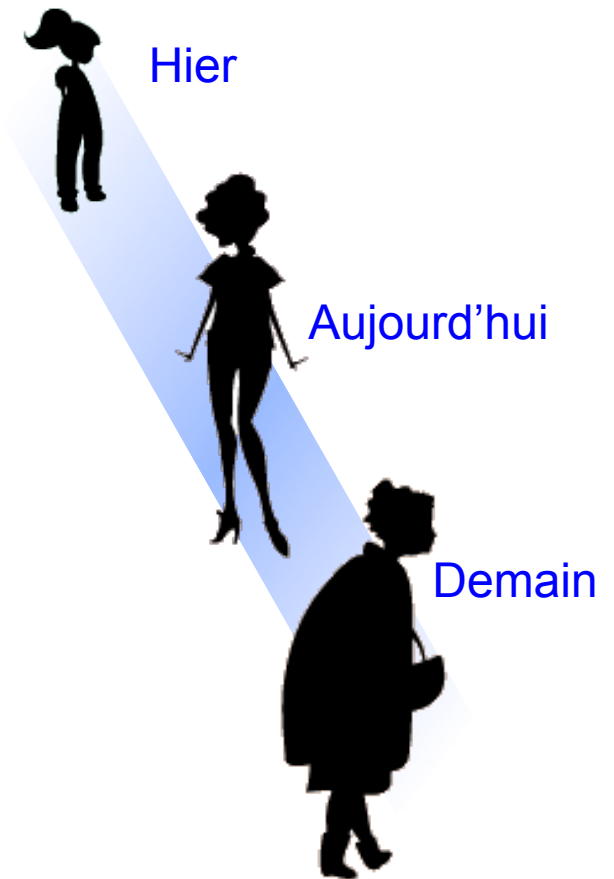
# L'espace

# et le temps

- Cadre ?



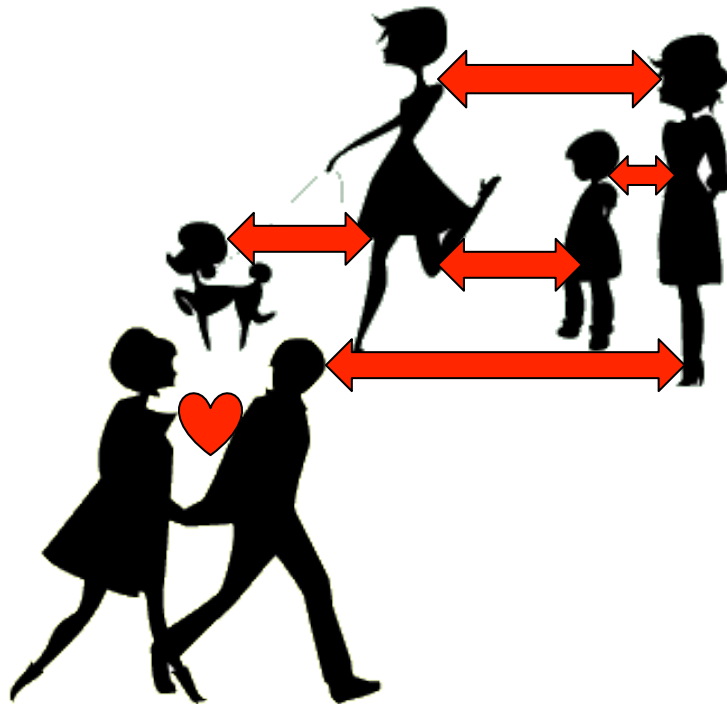
- Cadre ?



# L'espace

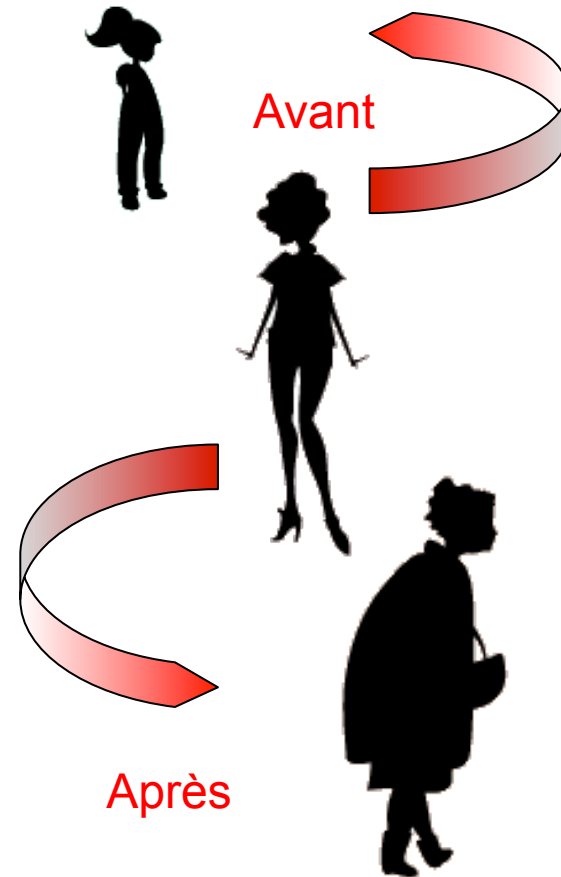
# et le temps

- Relation ?

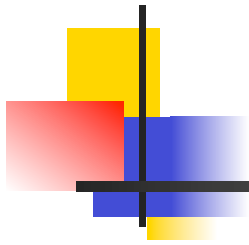


- Une espace sans corps est une phrase sans mot

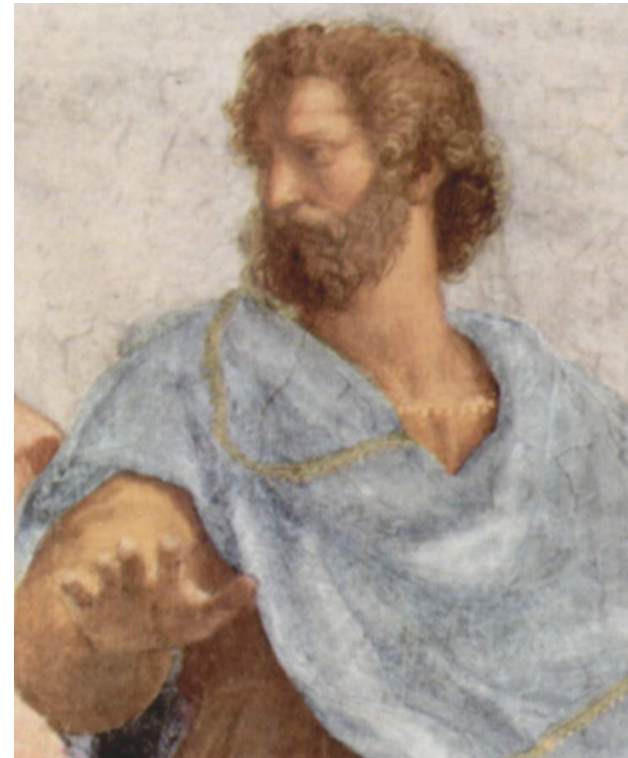
- Relation ?







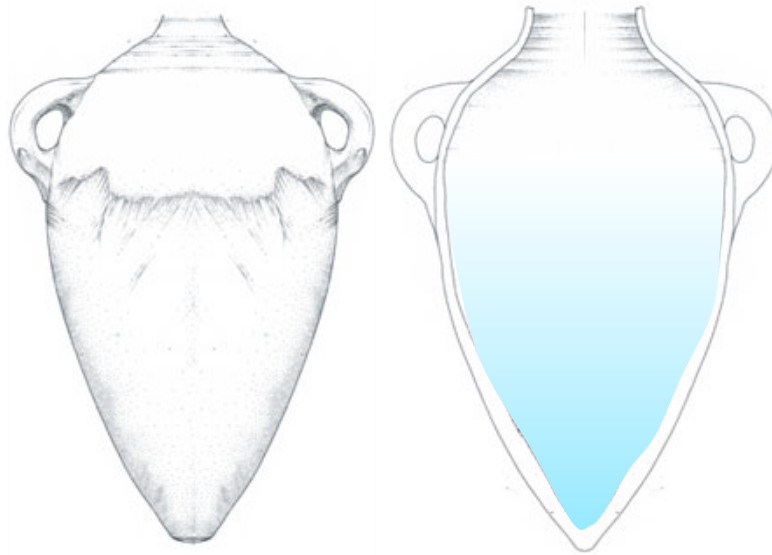
# ARISTOTE



## Le lieu et l'espace (Aristote, *Physique IV*)

### ■ Lieu

- Le lieu d'un objet n'est pas un objet, puisque des objets différents peuvent se succéder en un même lieu
- Il est comme le vase vis-à-vis de son contenu
- Le lieu d'un objet est l'enveloppe de cet objet

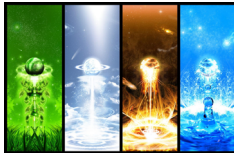


### ■ Espace

- L'espace est la réunion des lieux de tous les corps
- Il est donc dépendant des corps, et il les influence à son tour
  - Il n'est pas **isotrope**: le haut diffère du bas
  - Il n'est pas **homogène**: le centre (la Terre) diffère de la périphérie (les astres)
- L'étude de l'espace n'a de sens qu'en raison du mouvement
- Le mouvement implique le temps, « le nombre du mouvement »

# Aristote et le mouvement

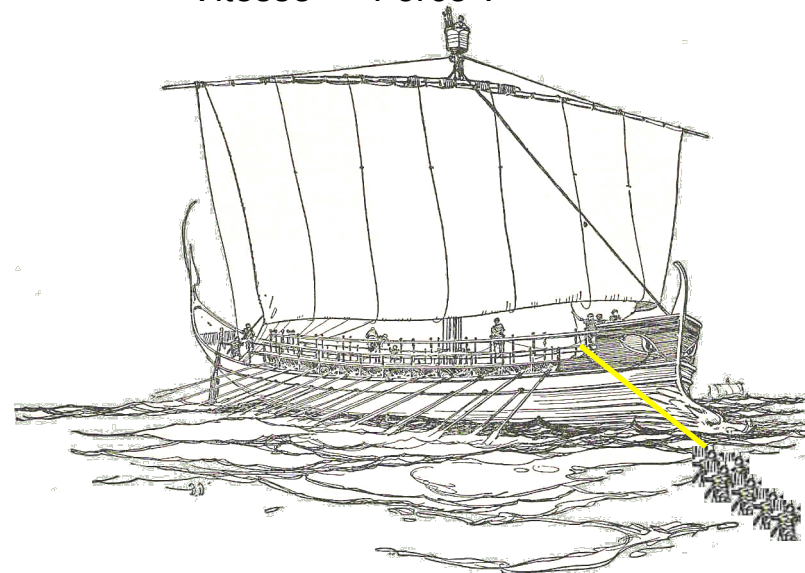
- Mouvements naturels
- Linéaire pour les 4 éléments
  - Vers le haut (air et feu)
  - Vers le bas (eau et terre)



- Circulaire pour le 5<sup>o</sup>, la *quintessence*, expliquant le mouvement des astres



- Mouvement forcé
  - Pas de force, pas de mouvement
  - Vitesse  $\Leftrightarrow$  Force ?



- Notions de **vitesse** et **d'accélération** non différenciées
- Celles de **force** et **d'impulsion** non plus

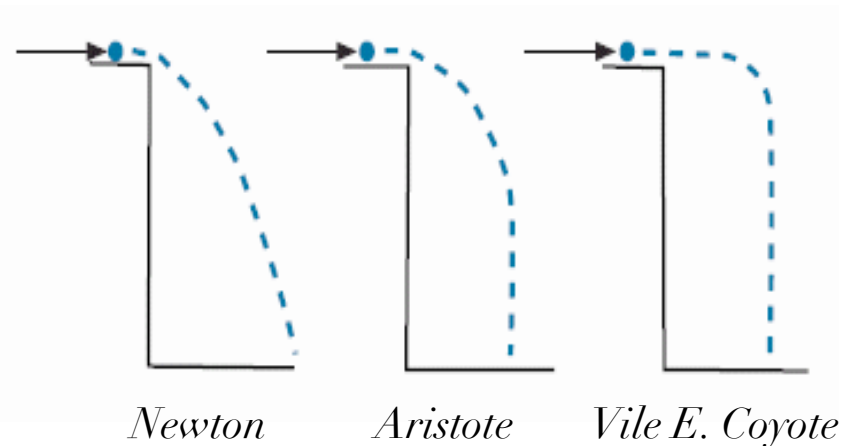
# Impetus

- Pourquoi la flèche se déplace-t-elle après avoir quitté l'arc?
- Philoponus (490-570) : la flèche reçoit un *impetus* de la part de l'arc, et elle le consomme au cours de son trajet

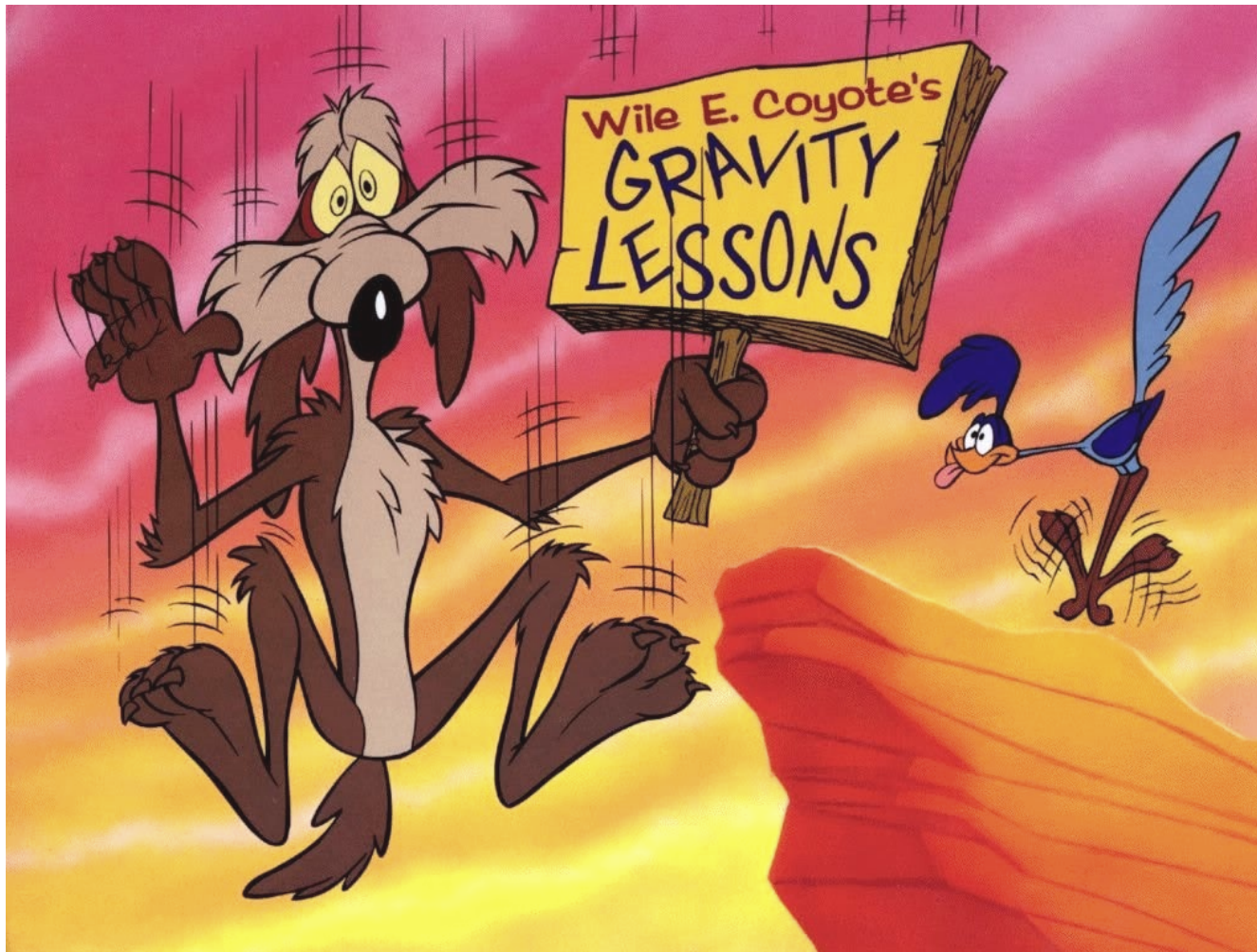
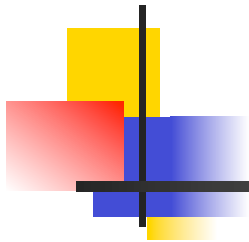


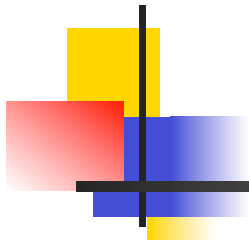
D. Ufano, *Tratado de Artilleria*, 1613

- Galilée: le mouvement n'a pas besoin de cause, c'est son *changement* qui en nécessite une
- Puis Newton
- Quand on saute d'une falaise, selon







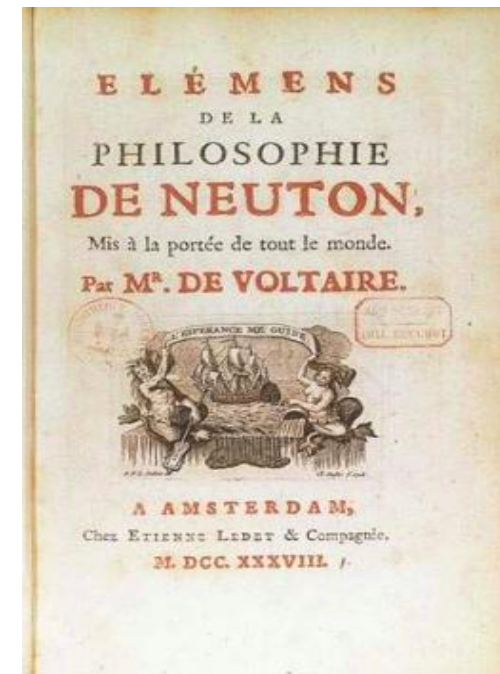


# NEWTON



## Espace absolu, temps absolu

- *L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire & immobile.*  
[Newton, *Principia*]
- *Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, & s'appelle durée.*
- Idée inspirée des réflexions mystiques médiévales sur l'omniprésence de la divinité et la théologie de la lumière divine
- → L'espace n'a aucune structure
  - Espace illimité sans origine
  - Isotrope
  - Homogène
- C'est un pur contenant



# Newton : les lois du mouvement

- La loi de l'inertie

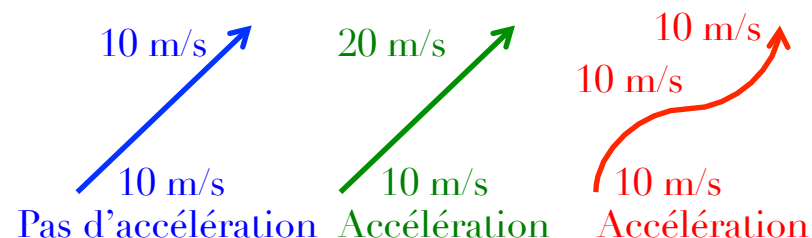
Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.

- $F = M \gamma$

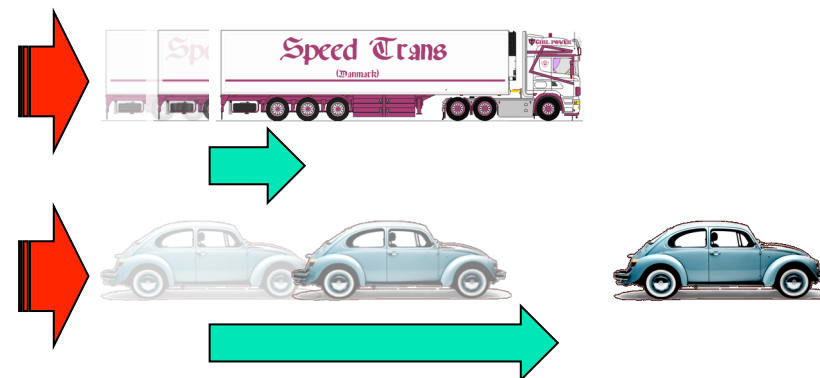
Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force est appliquée.

- Les actions réciproques de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens opposés.

- Une accélération est un changement dans l'intensité OU dans la direction de la vitesse



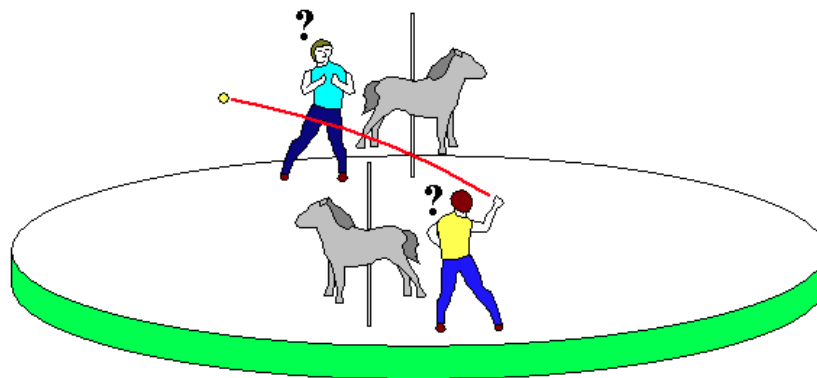
- Même force, masses différentes





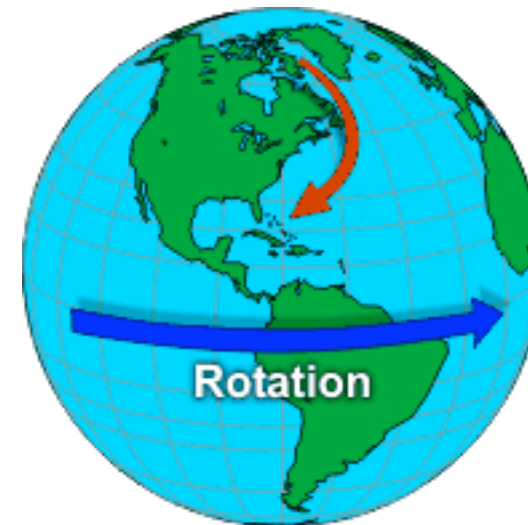
# Forces d'inertie

- La loi fondamentale de la dynamique,  $F = m \gamma$ , n'est vérifiée que dans un repère immobile, ou en translation uniforme par rapport à l'espace absolu
- Dans un repère accéléré (en rotation par ex.) apparaissent des forces fictives, les **forces d'inertie**



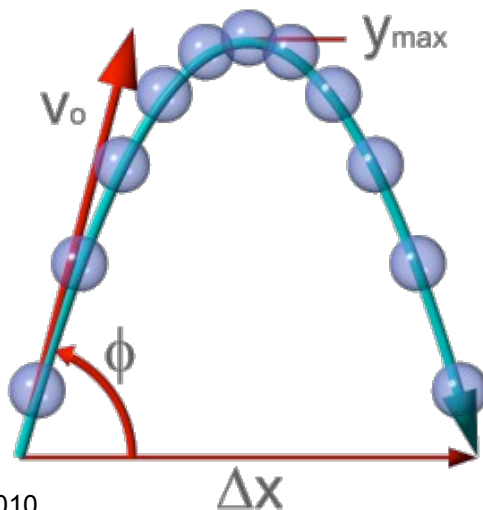
Force centrifuge

- Force de Coriolis
  - Un observateur en rotation a l'impression qu'un mobile qui s'éloigne de l'axe de rotation est soumis à une force de sens opposé à la rotation
  - Sur Terre, les vents acquièrent ainsi un sens de rotation (opposé dans chaque hémisphère)



## (Principe de moindre action)

- Lois newtoniennes de la dynamique → trajectoires des mobiles
- Exemple : une balle lancée en hauteur suit une parabole
  - Vitesse horizontale  $V_x$  constante
  - Vitesse verticale  $V_y$  diminuée par l'accélération constante de la pesanteur  $V_y(t) = V_y(0) - g t$
- On obtient aussi ces trajectoires à partir d'un **principe de moindre action**
  - La balle est lancée avec une énergie cinétique  $T = \frac{1}{2} m V^2$  et une énergie potentielle  $U$  nulle
  - L'énergie cinétique diminue au profit de l'énergie potentielle, maximale au sommet de la trajectoire, puis la situation s'inverse



- Le mouvement parabolique de la balle minimise l'intégrale de la quantité
$$\mathcal{L} = T - U$$
- Cela généralise le principe de Fermat en optique (chemin le plus rapide) à la mécanique (et à l'électrodynamique)

# La gravitation

- Un corps de masse  $M$  exerce sur un corps de masse  $m$  une force  $F$ 
  - proportionnelle aux masses  $M$  et  $m$
  - inversement proportionnelle au carré de la distance  $R$  entre les masses

■ Soit

$$F = G \frac{M m}{R^2}$$

où  $G$  est la constante de Newton

- ★ Le corps de masse  $m$  exerce *la même* force du le corps de masse  $M$

- Cette loi très simple permet de calculer
  - le mouvement de tous les astres
  - et de tous les satellites, sondes, etc.
- Mais aussi
  - les marées, terrestres ou non
  - l'aplatissement de la Terre
  - la structure interne des étoiles
  - la dynamique des galaxies



# La gravitation, loi universelle

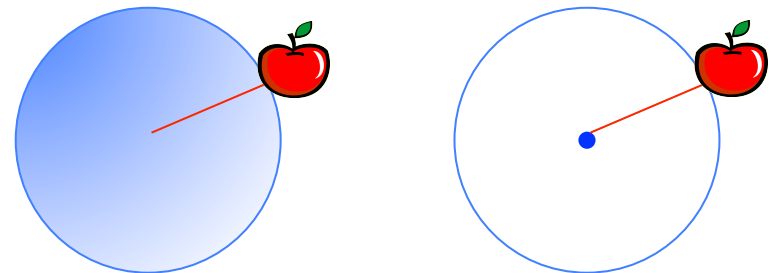
- La gravitation est universelle

La même loi explique la chute des pommes et le mouvement des planètes



- Pour Newton, le poids d'un objet résulte de son attraction par la Terre

- Tout se passe comme si la masse de la Terre était concentrée en son centre

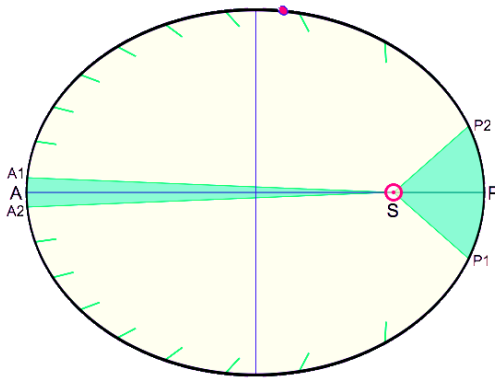


- Calculer le mouvement d'une planète à partir de cette loi exige la maîtrise du calcul différentiel
  - Précisément inventé par Newton
  - Ou par Leibniz ?



# Lois de Kepler

- 1° loi: les planètes suivent des ellipses dont le Soleil occupe un foyer



- 2° loi: des aires égales sont balayées en des temps égaux
- 3° loi: le carré de la période est proportionnel au cube du  $\frac{1}{2}$  grand axe
  - → permet de calculer la distance de toutes les planètes connaissant la distance de l'une d'elle

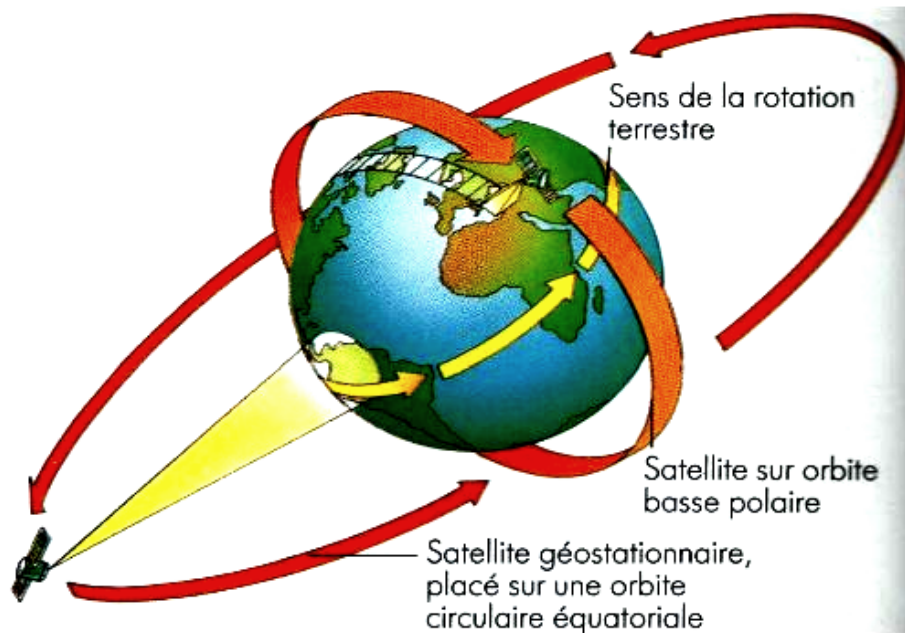
- Cas simple: mouvement circulaire

- $\gamma = GM / R^2 = V^2 / R$
- Période  $T = 2\pi R / V$
- $\Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 R^2 / V^2 = [4\pi^2/GM] R^3$

- On retrouve la 3° loi de Kepler
- Le coefficient de proportionnalité donne la **masse** du corps central
  - si on connaît G
- Planètes => masse du Soleil
- Satellites => masse de la planète
  - même si on ne connaît pas G, on peut calculer le *rapport* des masses, et donc les *densités relatives*

## En orbite terrestre

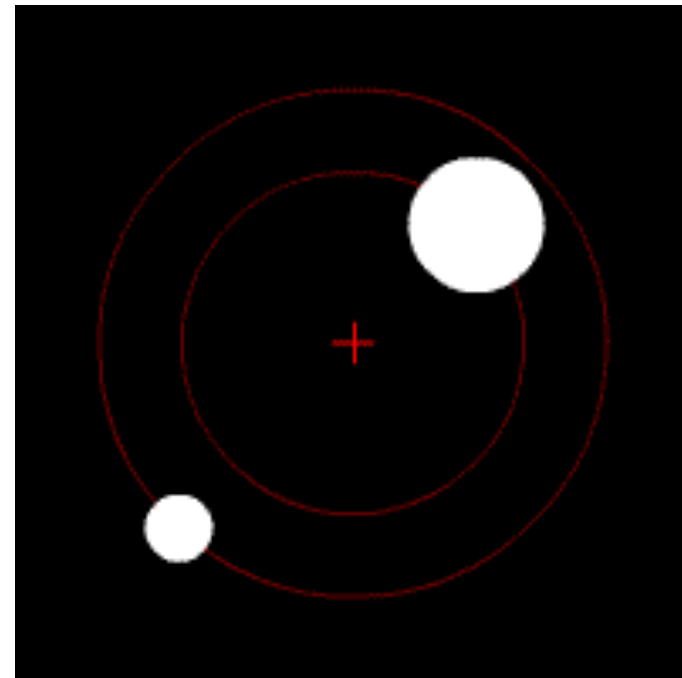
- Pourquoi l'astronaute flotte-t-il dans l'espace?
- Encore Kepler !
  - L'astronaute « tombe »...
  - ...à la même vitesse que la navette en orbite



# Le problème à N corps (1)

- Problème à 1 corps
  - Une masse importante
  - Une ou plusieurs masses négligeables
  - → lois de Kepler
- Problème à 2 corps
  - Deux corps de masses comparables
  - Se ramène mathématiquement au problème à 1 corps
  - Les masses orbitent autour de leur centre de masse → Kepler
- Problème à 3 corps
  - Trois corps de masses comparables
  - Problème insoluble exactement
  - → solutions approchées

- En orbite autour du centre de masse:

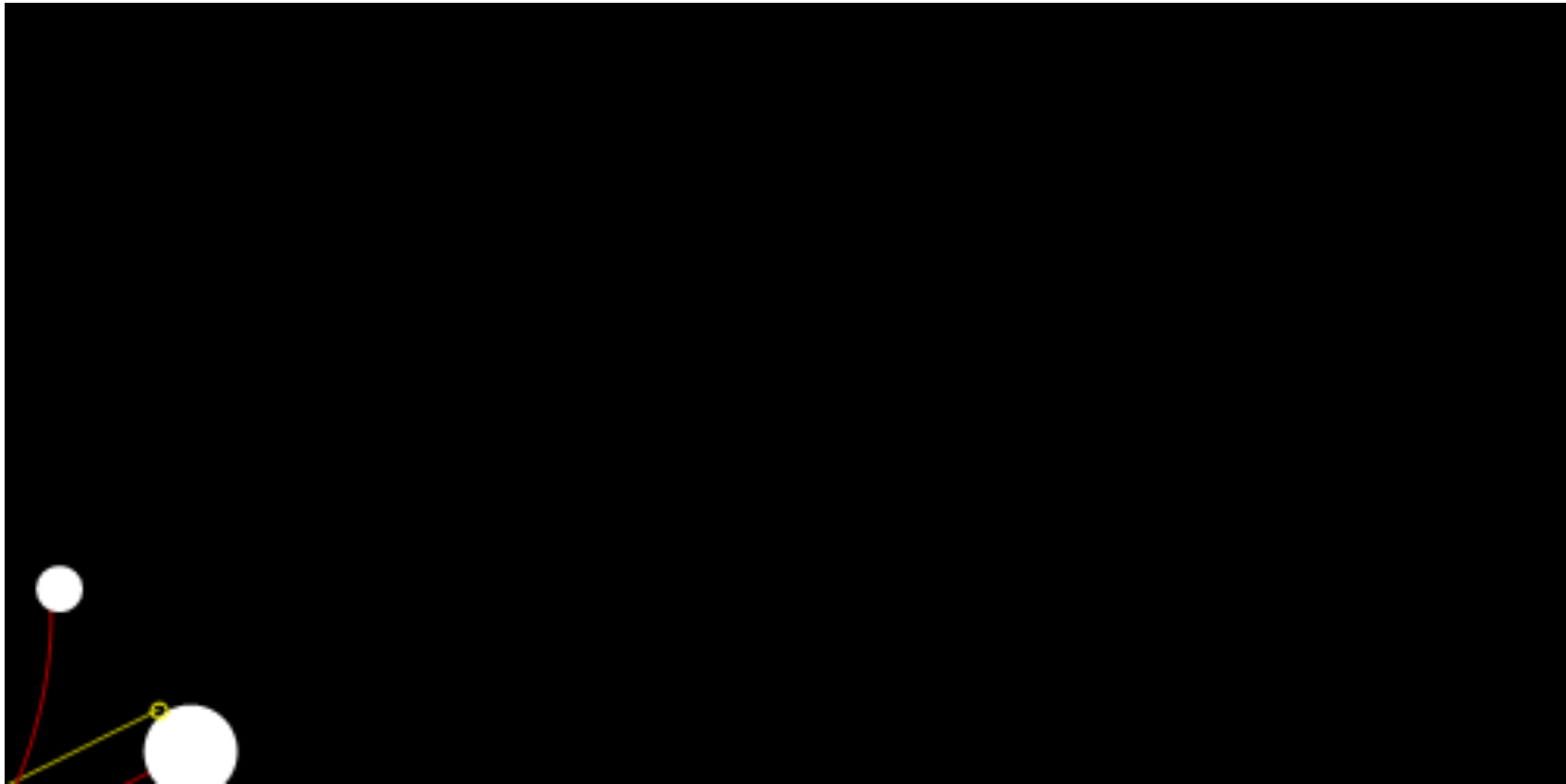




## Systeme binaire

---

- Et quand le centre de masse se deplace par rapport à l'observateur



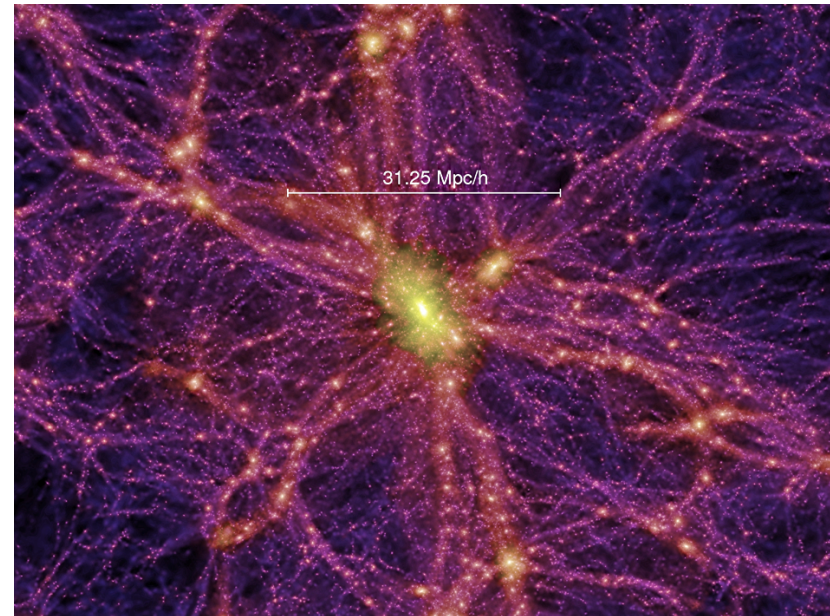


## Le problème à N corps (2)

- Si le nombre de corps en interaction gravitationnelle est très grand, les méthodes statistiques s'appliquent
  - → Formes d'équilibre des systèmes autogravitants (planètes ou galaxies)
  - → Stabilité des amas d'étoiles
- Théorème du viriel (Clausius 1870)
  - La moyenne de l'énergie cinétique  $T$  d'un système autogravitant de  $N$  corps en équilibre est égale à la moitié de leur énergie potentielle  $U$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

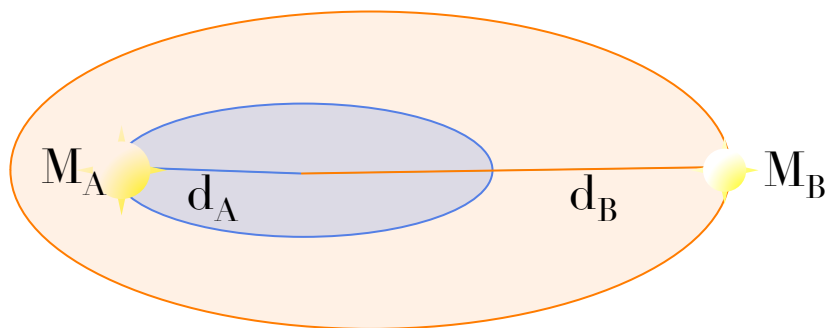
- Simulations numériques



- Simulation *Millenium* de  $2160^3$  «particules» en interaction pour étudier la formation des amas de galaxies

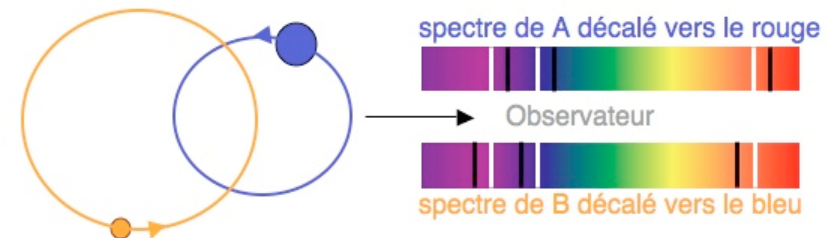
# Masse des étoiles

- Étoile solitaire?
  - Il faut une planète
  - ou une théorie des étoiles ( $\mathcal{L} \Rightarrow M$ )
- Étoiles binaires
  - en orbite autour de leur centre de masse avec une période T



- $M_A d_A = M_B d_B$
- Kepler :  $(M_A + M_B) T^2 = (d_A + d_B)^3$   
M en  $M_{\text{solaire}}$  si T en années et d en U.A.

- Évidemment il faut connaître la distance du système binaire, et l'inclinaison du plan orbital
- Cela suppose que les deux étoiles soient vues séparément (binaire visuelle)
- Un peu plus compliqué pour les binaires à éclipses et les binaires spectroscopiques





# Masse des galaxies

---

## Galaxies spirales

- Les étoiles ont
  - un mouvement de rotation d'ensemble, dans le plan de la spirale à une vitesse de quelques centaines de km/s
  - des mouvements plus erratiques de quelques (dizaines de) km/s
- Encore Kepler ?
  - Vitesse de rotation  $V(r)$
  - → Masse à l'intérieur de l'orbite
  - $M(r) = r V^2(r) / G$
  - Observation  $V(r) \sim \text{constante}$
  - → M augmente avec r → où s'arrêter?

## Galaxie elliptiques

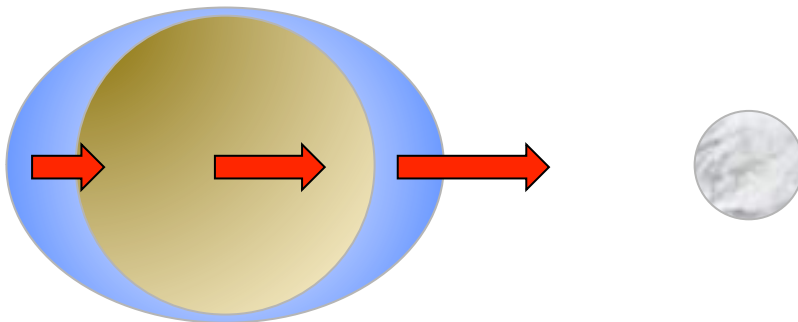
- Les étoiles ont des vitesses dans tous les sens
  - Conséquence des *très* nombreuses interactions gravitationnelles
- Statistiquement, on a une *distribution* des vitesses
  - Avec une vitesse moyenne (nulle dans le référentiel du centre de masse)
  - Et une dispersion  $\langle V^2 \rangle$  autour de la vitesse moyenne
- Théorème du viriel
  - Énergie cinétique proportionnelle aux masses
  - Énergie potentielle proportionnelle au **carré** des masses

# Marées

- Conséquence d'un champ de gravitation qui n'est pas uniforme

- → la force de gravité n'est pas la même en deux points d'un objet étendu
- → la différence des forces déforme cet objet

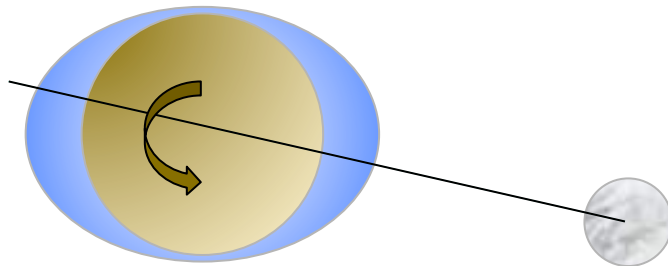
- La Lune attire fortement la partie de la Terre proche d'elle, un peu moins le centre de la Terre, et encore moins la partie la plus éloignée
- → déformation
- Plus sensible pour les parties fluides
  - océans
  - magma



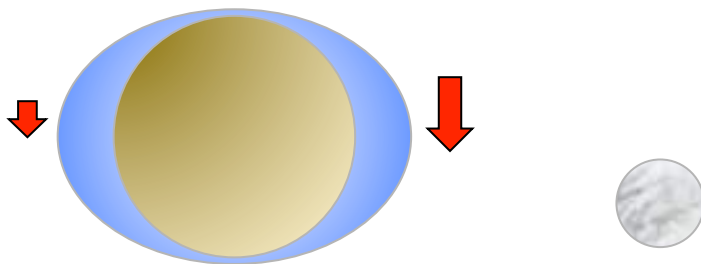
S'y ajoute l'influence du Soleil

## Verrouillage gravitationnel (*tidal lock-in*)

- Frottement : les marées emportées par la rotation de la Terre sont en avance % axe Terre-Lune



- Les bourrelets exercent alors un couple

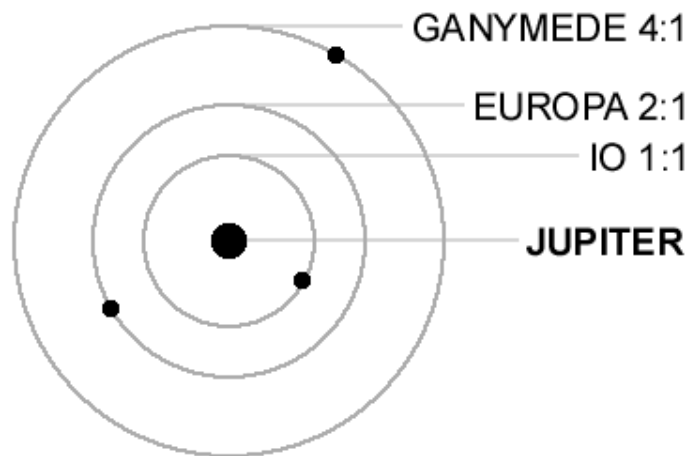


- qui tend à aligner la période de rotation de la Terre (le jour) avec la période orbitale de la Lune (le mois)

- Bien entendu, la Lune est aussi soumise aux effets de marée
- Comme elle est plus petite, son verrouillage a été bien plus rapide que celui de la Terre
- Conséquences
  - La Lune présente toujours le même côté
  - La rotation de la Terre ralentit
  - La Lune s'éloigne (conservation du moment angulaire total)

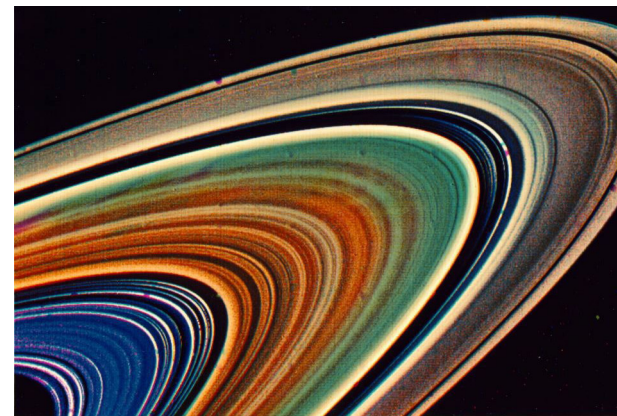
# Résonances

- Résonance orbitale : les périodes sont dans des rapports entiers
  - 2:1 un corps met 2 fois plus de temps que l'autre
  - 2:3 un corps effectue 2 orbites pendant que l'autre en effectue 3



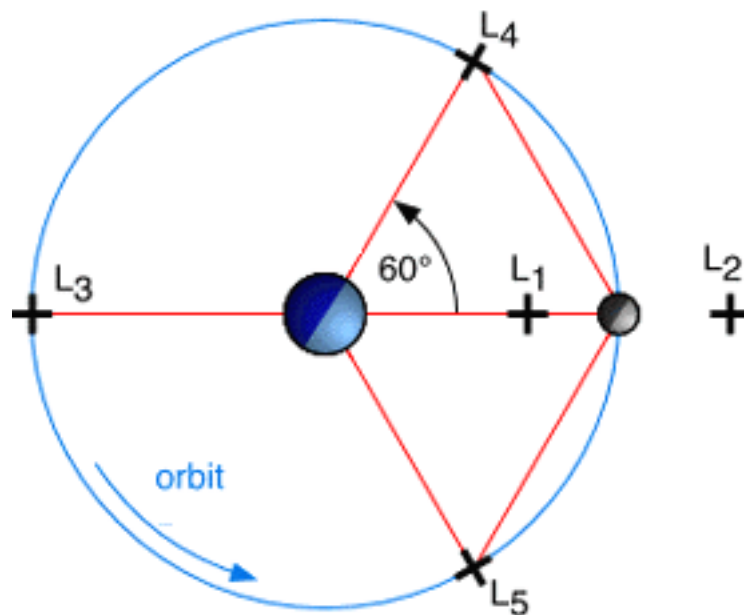
- Satellites galiléens de Jupiter

- Les résonances peuvent stabiliser les orbites en empêchant les corps de s'approcher
- Elles peuvent au contraire les déstabiliser → certaines orbites sont vides
  - Anneaux de Saturne
  - Trous dans les ceintures d'astéroïdes

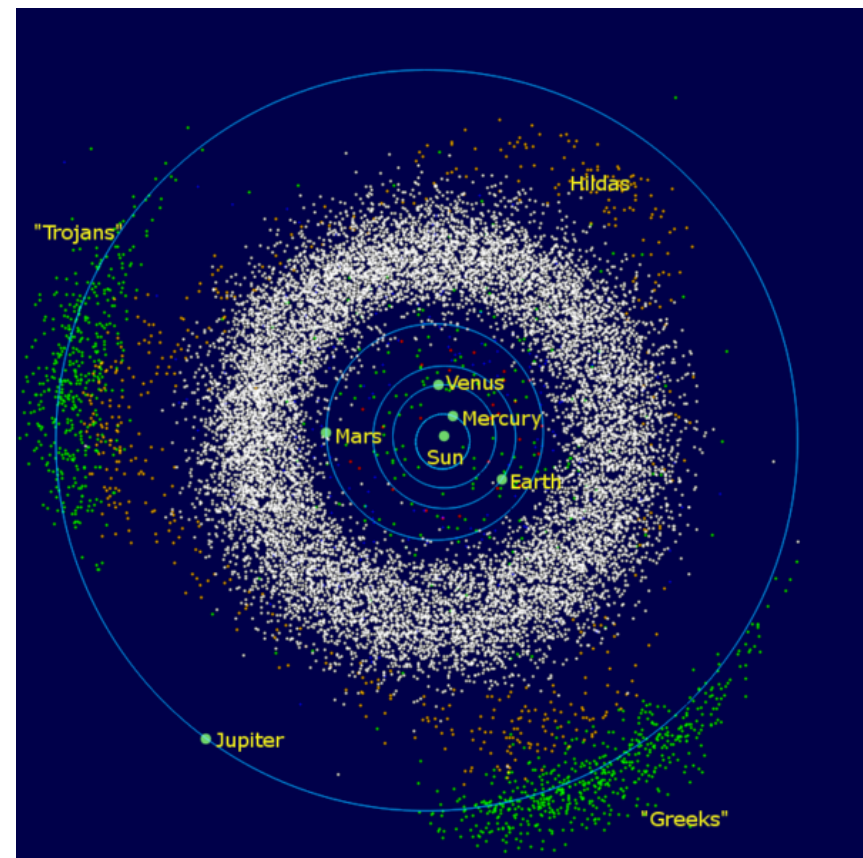


# Points de Lagrange

- 5 points d'équilibre dans un système de deux masses
  - (cas particulier du problème à 3 corps)
  - $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont instables (stables en  $\theta$  mais instables en  $r$ )
  - $L_4$  et  $L_5$  sont quasi-stables



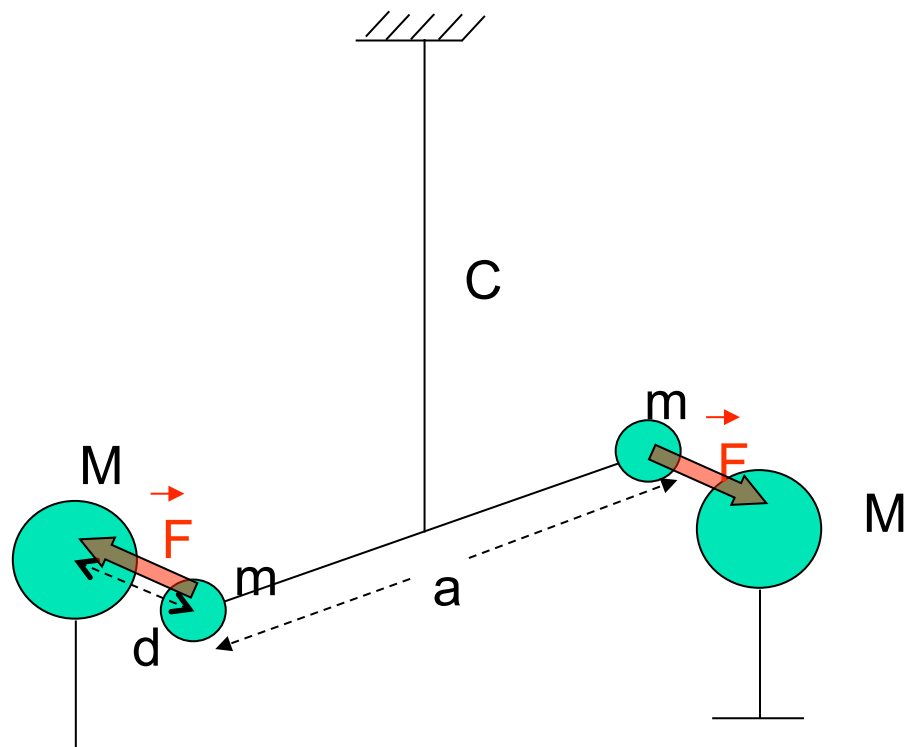
- Astéroïdes « troyens » en  $L_4$  et  $L_5$





# Expérience de Cavendish: la mesure de G

- Balance de torsion



- Principe

- En approchant les grandes masses des petites, le pendule de torsion tourne d'un angle  $\alpha$  proportionnel à G

$$\alpha = 2 G M m a / [C d^2]$$

- La constante C de torsion du fil est donnée par la période d'oscillation du pendule  $T = 2\pi [2ma^2/C]^{1/2}$

- $\rightarrow G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg sec}^2)$

- L'objectif de Cavendish était en fait de « peser » la Terre, pas de mesurer G



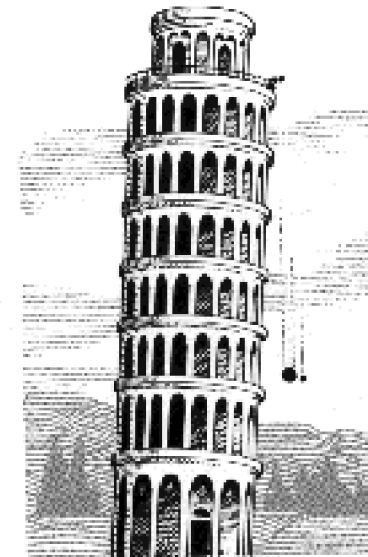
# Galilée et le principe d'équivalence

- Masse inertielle
  - $F = m_i \gamma$
- Masse grave
  - $F = G m_g m_g' / R^2$
- Si  $m_i = m_g$ , l'accélération subie par un corps ne dépend pas de ce corps

$$\gamma = G m' / R^2$$

- → La trajectoire gravitationnelle d'un corps ne dépend pas du corps
- Elle ne dépend en particulier pas de sa composition ni de sa structure interne

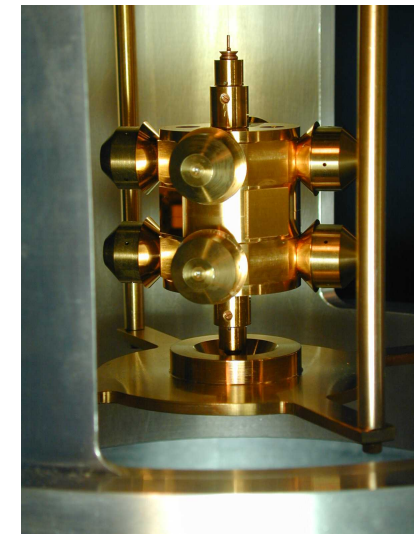
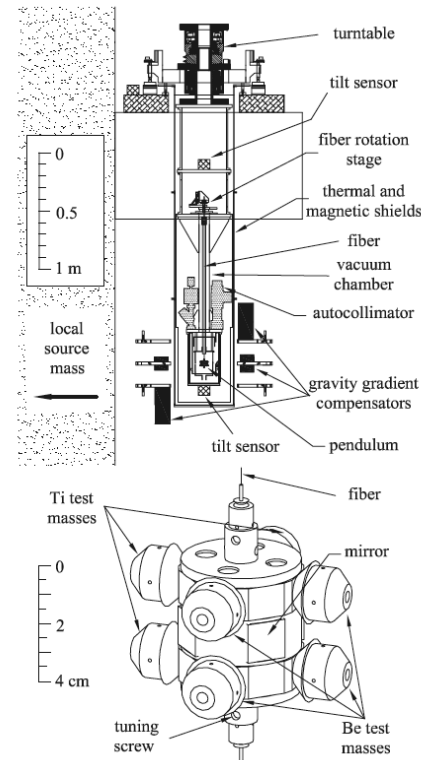
- Principe d'équivalence
  - L'accélération de la gravité est identique pour toutes les masses

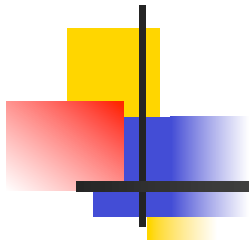


- Point de départ de la relativité générale

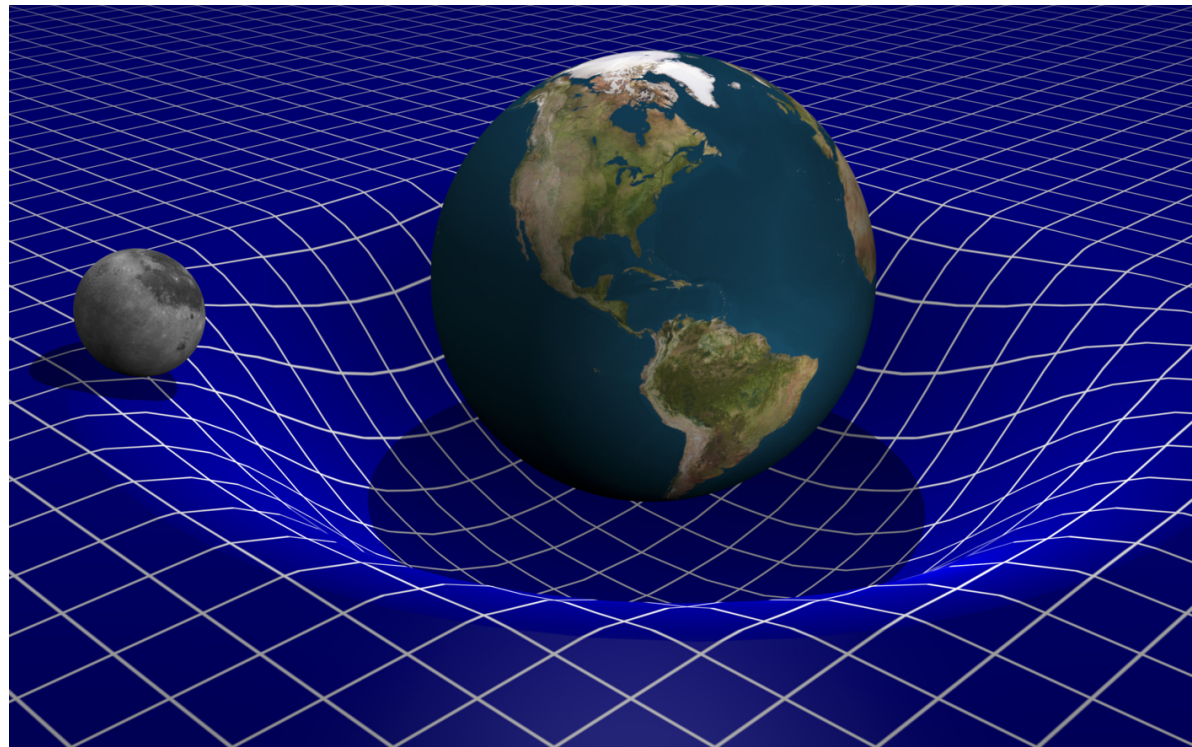
# Vérification expérimentale du principe d'équivalence

- Isaac Newton
  - Pendules en matériaux différents
  - → écart relatif  $< 10^{-3}$
- Loránd Eötvös
  - Pendule de torsion, sensible à la différence entre la gravitation et l'accélération due à la rotation de la Terre
  - $< 10^{-6}$  (1885)
  - $< 10^{-8}$  (1909)
- Robert Dicke
  - Pendule de torsion
  - $< 10^{-11}$  (1964)
- Projet de satellite STEP
  - $< 10^{-18}$  (2013?)
- Équipe Eöt-Wash  $< 10^{-13}$  (2008)
  - Différence d'accélération entre Be et Ti



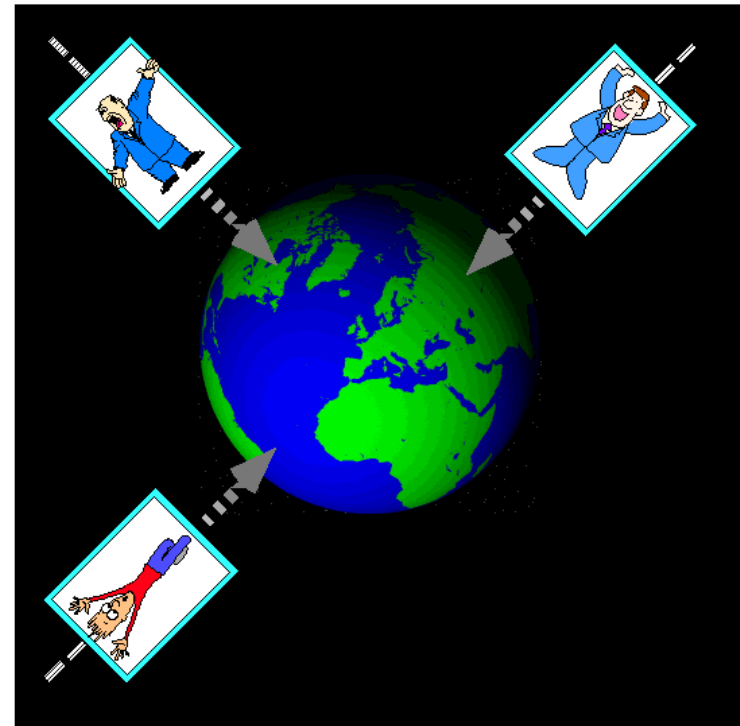


# EINSTEIN



# Principe d'équivalence

- La gravitation accélère tous les corps de la même façon
- ...comme la force centrifuge
- C'est donc en réalité une force d'inertie
- ...que l'on peut faire disparaître dans un référentiel approprié
- Par exemple en chute libre les effets de la gravité disparaissent
  - ascenseur d'Einstein
  - dans un satellite en orbite terrestre
- Mais cela n'est possible que dans un volume limité de l'espace
- Comment faire disparaître un champ de gravité qui n'est pas uniforme?



# Une question de courbure

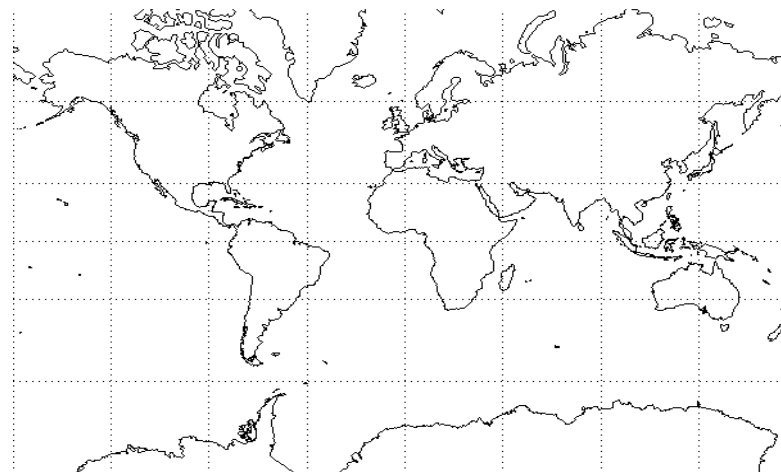
- Analogie avec la surface de la Terre

- Près de chaque point, la surface est à peu près plate et on peut tracer une carte locale euclidienne

- Mais il est impossible de raccorder ces cartes sans déformer la surface. On peut conserver

- soit les angles (projection *conforme*)
  - Mercator, Lambert, etc.
- soit les surfaces (projection *équivalente*)
  - Peters, Albers, etc.
- mais jamais les deux à la fois

- Mercator



- → Cela indique que le plan possède une courbure intrinsèque différente de la sphère

- Intrinsèque? Le cylindre a la même courbure que le plan, puisqu'on peut rouler une carte sans la déformer.

## Une question de courbure (2)

- La courbure pour une surface (ou un espace-temps) signifie que la géométrie n'est pas la géométrie euclidienne
- Cela signifie que, lorsqu'on se déplace sur la surface (ou dans l'espace-temps) les longueurs et les angles varient de place en place

- Le théorème de Pythagore prend des formes plus générales

$$\partial S^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$$

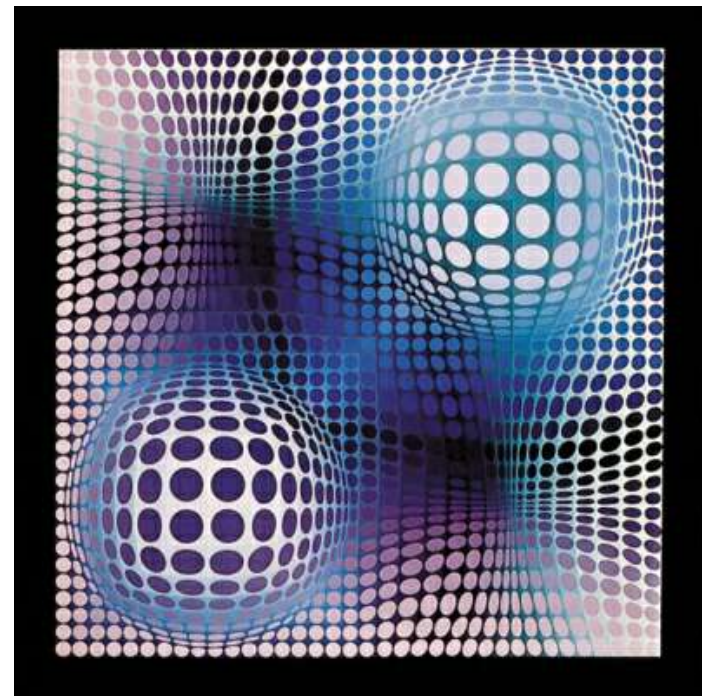


- devient

$$\partial S^2 = F(X,Y)\partial X^2 + G(X,Y)\partial Y^2$$

- Ou encore

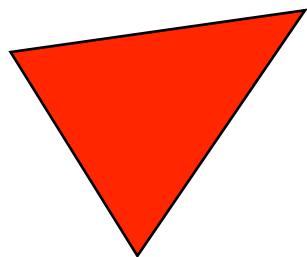
$$\partial S^2 = \sum g_{\mu\nu}(X)\partial X_\mu\partial X_\nu$$



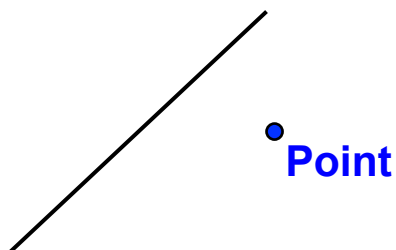
# Espace-temps courbe

## ■ Géométrie euclidienne

- Somme des angles =  $180^\circ$

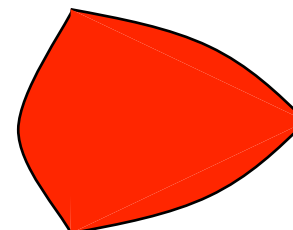
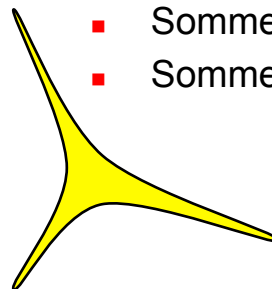


- Périmètre d'un cercle  $P = 2\pi R$
- Une seule parallèle à une droite par un point extérieur

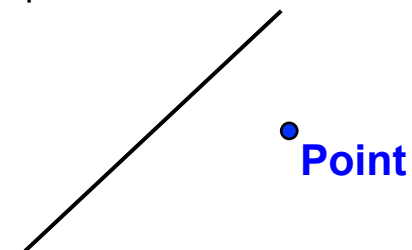
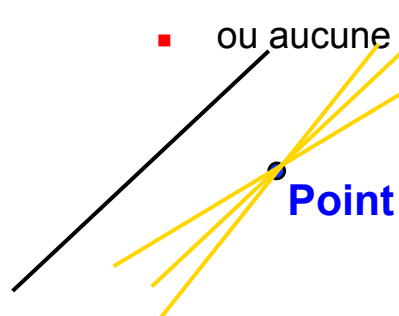


## ■ Géométrie riemannienne

- Somme des angles  $< 180^\circ$
- Somme des angles  $> 180^\circ$



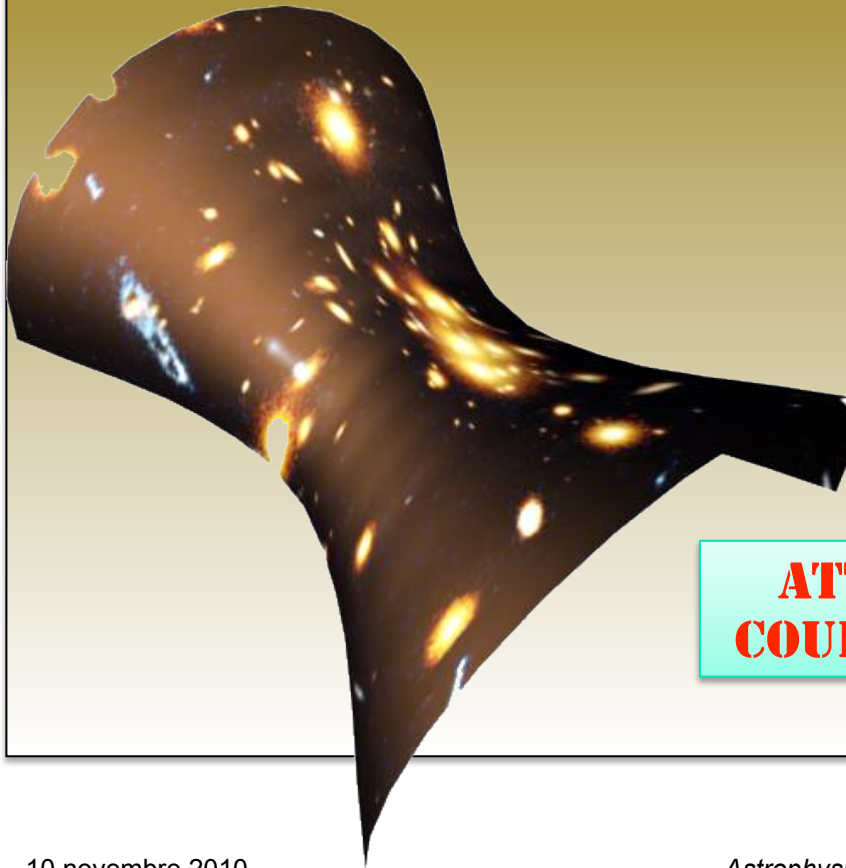
- Périmètre d'un cercle  $P > 2\pi R$
- Périmètre d'un cercle  $P < 2\pi R$
- Ecart proportionnel à la surface
- Une infinité de parallèles
- ou aucune



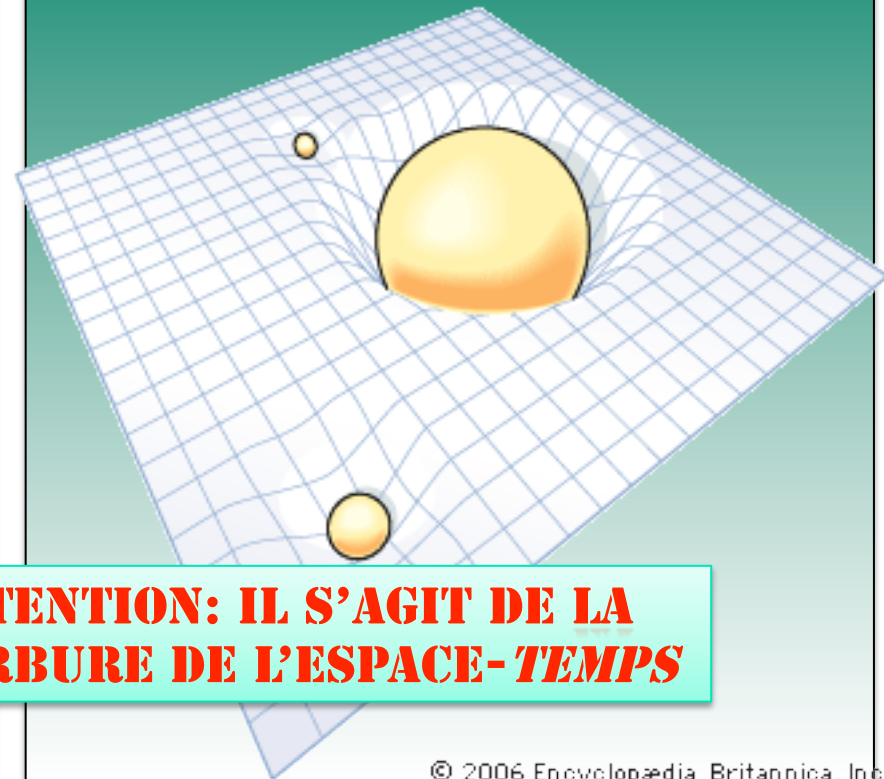


## La relativité générale en deux ph(r)ases

- L'*espace-temps* possède une courbure qui influe sur le déplacement de la matière et de la lumière



- La présence de matière influe sur la courbure de l'*espace-temps*



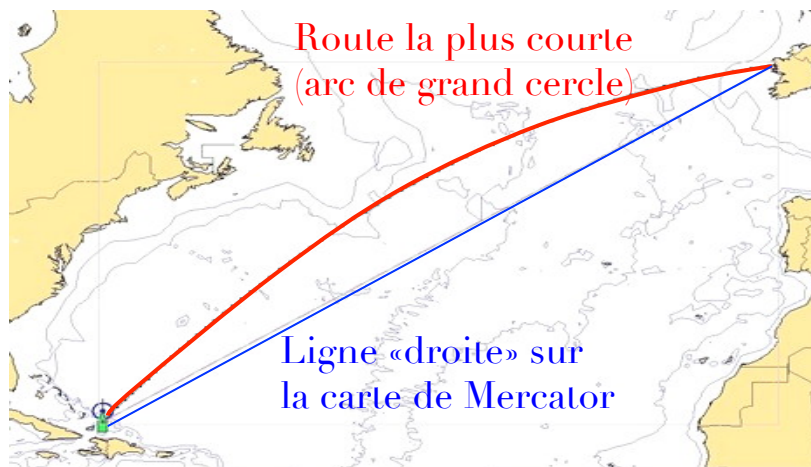
**ATTENTION: IL S'AGIT DE LA COURBURE DE L'ESPACE-TEMPS**



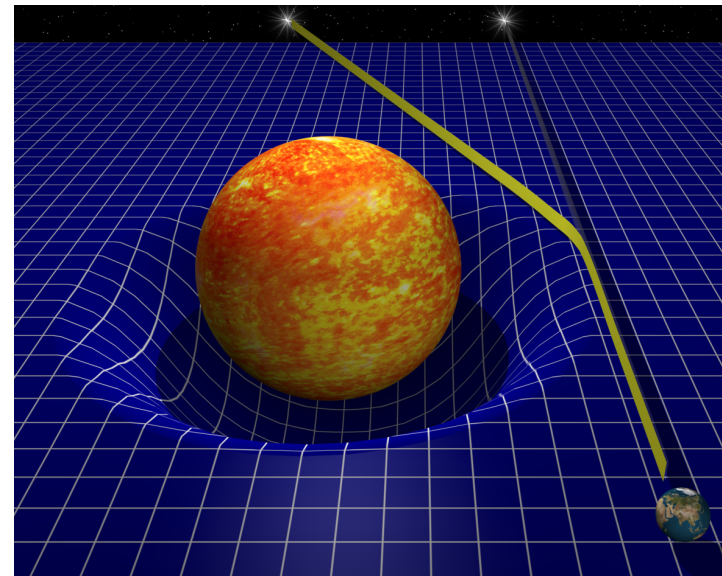
## «Déviation» des rayons lumineux

- La lumière se déplace en ligne droite
- Mais la ligne droite (le chemin le plus court) peut sembler courbe *quand on utilise un référentiel inadéquat*

- Analogie: encore la surface de la Terre
  - Pour aller d'Irlande aux Antilles



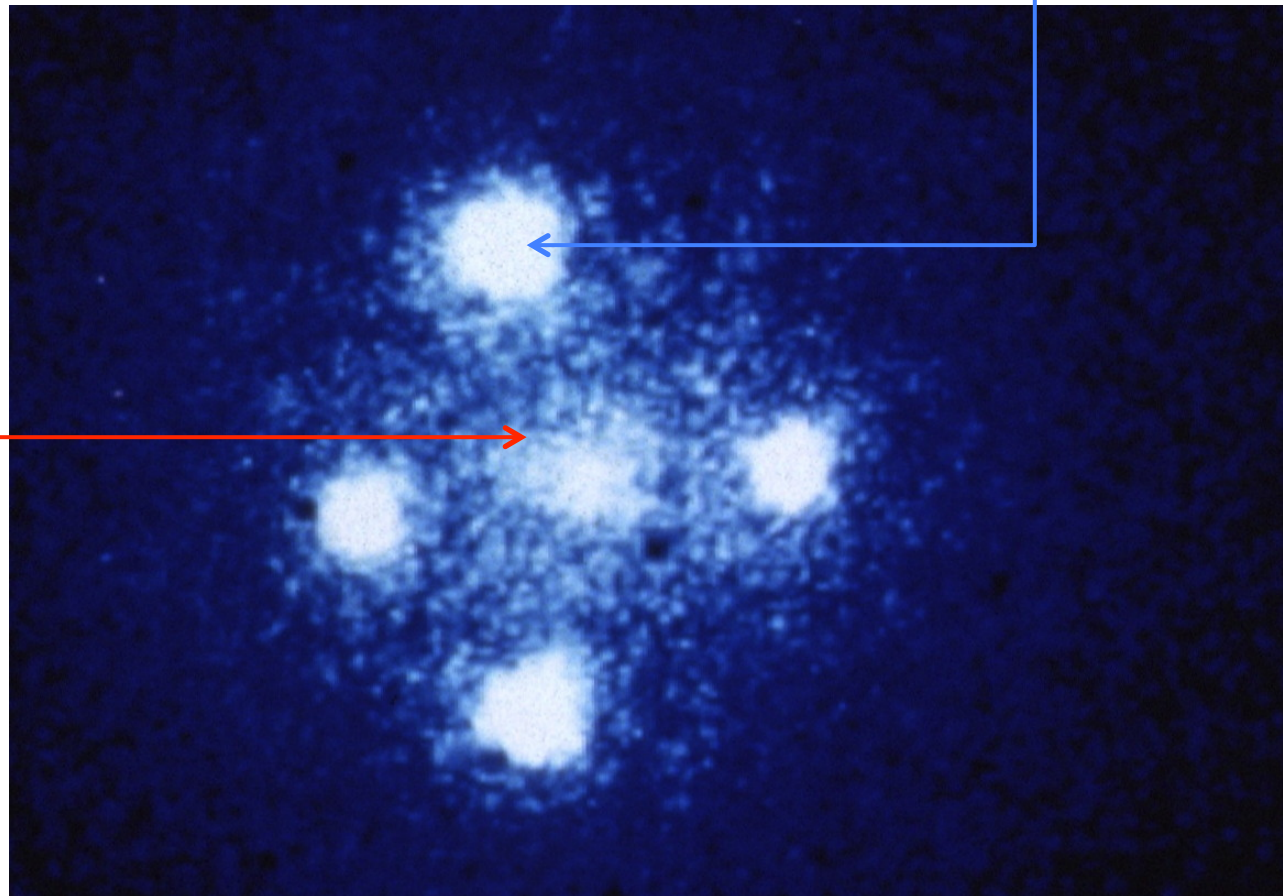
- Déviation de la lumière à proximité d'une masse



- Un rayon lumineux qui rase le Soleil est dévié de 1'' d'arc
- ➔ Premier test de la relativité générale en 1919

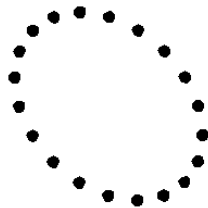
## La Croix d'Einstein

- La galaxie ZW 2237+030 à 400 millions a.l. donne 4 images du quasar QSO 2237+0305 situé en arrière-plan, à 8 milliards a.l



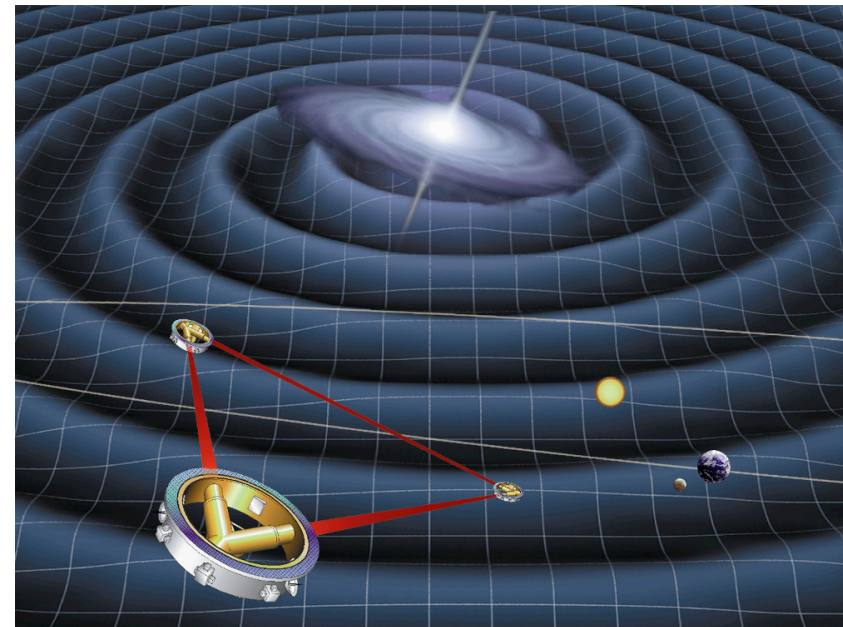
# Ondes gravitationnelles

- Une déformation de l'espace qui se déplace est une *onde gravitationnelle*
- Elle se manifeste comme une variation périodique de la position de points «fixes»
- Observations indirectes: pulsar binaire
- Observations directes
  - Weber
  - LIGO, VIRGO
  - LISA



- Elle est produite par le mouvement périodique de masses
- Son ampleur est extrêmement faible
  - Même avec de grandes masses (étoiles) en mouvement rapide (effondrement)

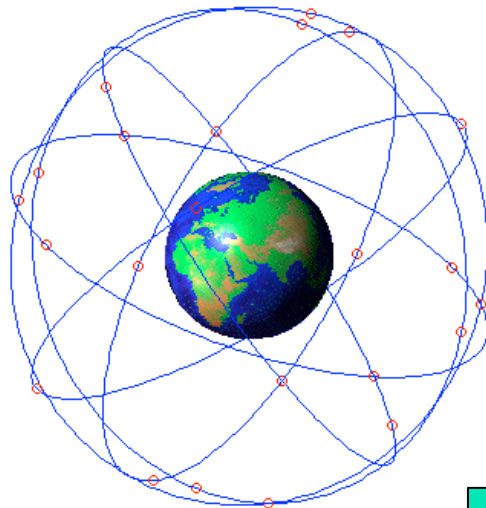
$$\partial X/X < 10^{-20}$$



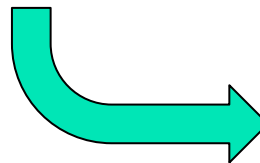
# Tests de la relativité générale

- Le GPS

- La différence entre les temps d'arrivée des signaux de 4 satellites indique la position



- Précision ~ 10 m
- Si on tient compte de la RG (changement de fréquence des horloges)



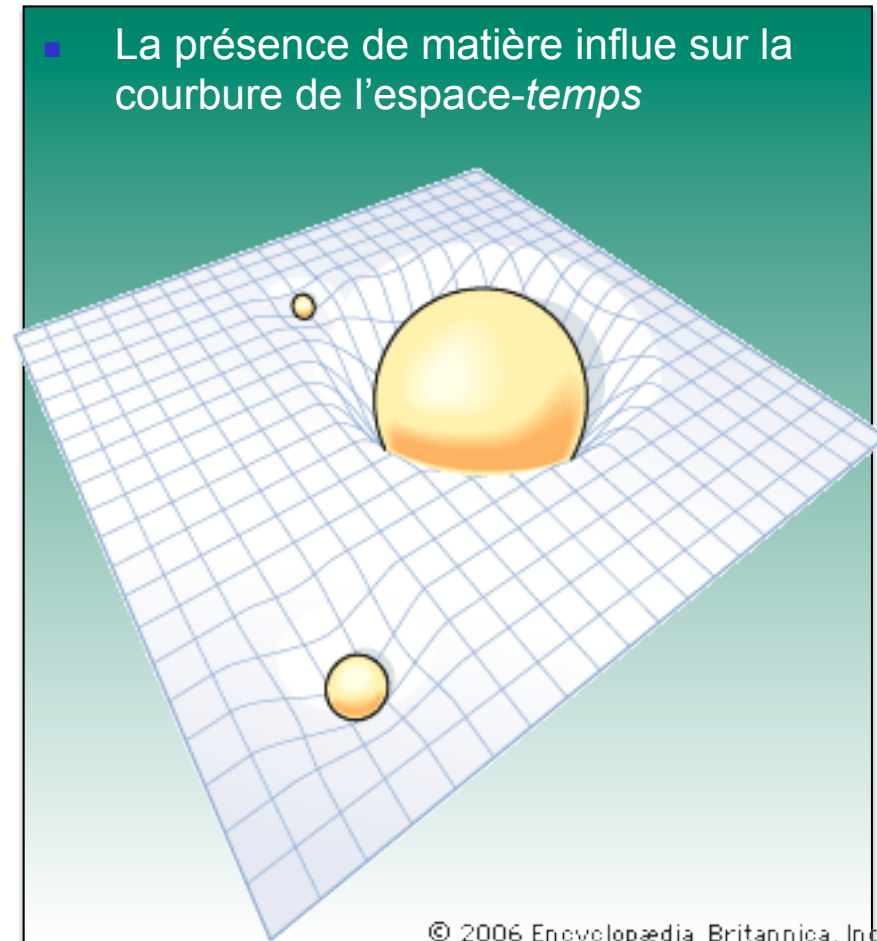
- Déviation de la lumière
- Effet Shapiro
- Décalage gravitationnel des fréquences
- Ralentissement des pulsars binaires
- Mirages gravitationnels
- *Théorie du big bang*





# Comment la matière courbe l'espace-temps

- Naïvement: plus il y a de matière, plus il y a de courbure
- Mais il y a de la courbure (= de la gravité) même là où il n'y a pas de matière
  - au-dessus de la Terre par exemple!
  - ou loin du Soleil
- Plus subtil
  - La matière induit une courbure là où elle se trouve
  - Cette courbure induit une courbure plus faible dans son voisinage





## Un peu de maths ? Courbure $\Leftrightarrow$ matière

- La matière est décrite par sa distribution
  - de masse (densité pour une distribution continue)
  - d'énergie (rappel  $E = mc^2$ )
  - de quantité de mouvement (impulsion)
  - de température, pression...
- Tout ceci est encodé dans un objet mathématique, le *tenseur énergie-impulsion*  $T$ 
  - qui varie en général d'un point à l'autre
- La courbure est encodée dans le tenseur métrique  $g$ 
  - celui de  $\partial S^2 = g_{\mu\nu} \partial X_\mu \partial X_\nu$

- Idée la plus simple

$$g = T$$

mais cela

1. conduit à des incohérences mathématiques
2. ne redonne pas la théorie de Newton

- Meilleure idée : calculer à partir du tenseur métrique une fonction  $G[g]$  adéquate
  - Einstein y a passé des années
  - Hilbert a ensuite trouvé une voie directe (principe de moindre action)
- Équation d'Einstein

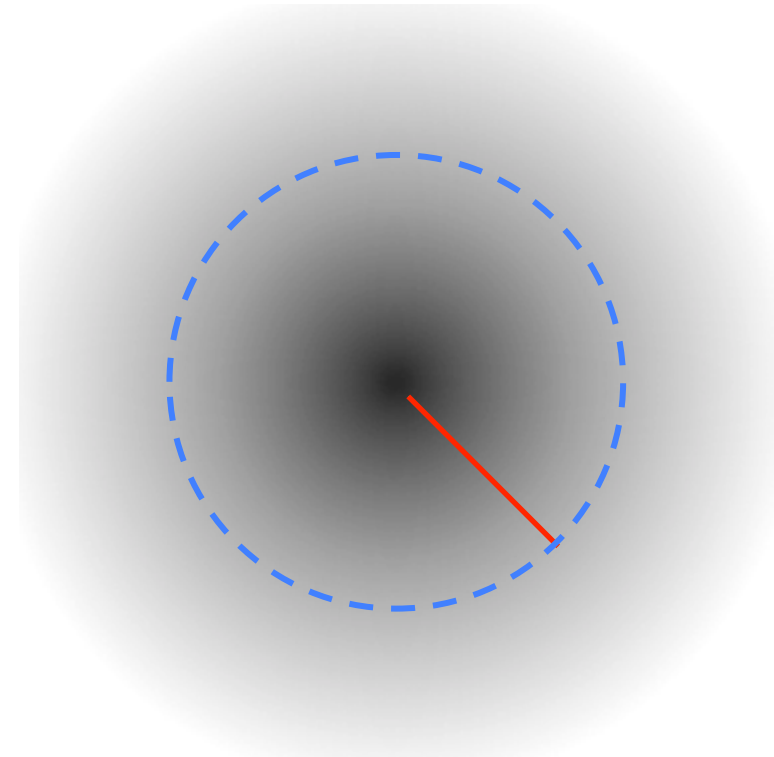
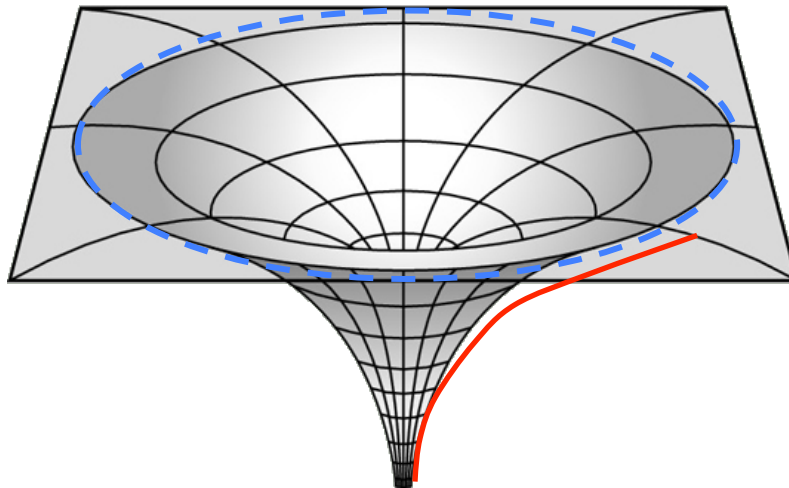
$$G[g] = T$$

# Schwarzschild et les singularités

- Einstein a vérifié en 1915 que sa théorie reproduisait bien celle de Newton pour un champ faible
- Schwarzschild a donné en 1916 la solution générale pour une distribution de matière sphérique et limitée (étoile)
- Pour une distribution ponctuelle, la courbure devient **infinie** à l'origine

## TROU NOIR

- Circonférence  $\ll 2\pi$  Rayon







## Questions ouvertes

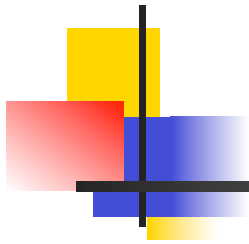
---

### Espace-temps ou gravitation?

- La relativité générale supprime la gravitation, ramenée à une simple manifestation de la courbure de l'espace-temps
- Inversement, on peut considérer que l'espace et le temps ne sont que de simples manifestations du champ de gravitation
- Ce n'est pas purement académique, si l'on veut unifier la gravitation avec les interactions électromagnétique, forte et faible

### Quantification ?

- La relativité générale n'est pas une théorie quantique
  - Mais  $T$  est quantifié dans  $G[g] = T$
- Tous les efforts pour la quantifier sur le modèle de l'électromagnétisme
  - échange de **gravitons** entre **masses** comme de **photons** entre **charges**ont échoué
- Quantifier l'espace et le temps ?
- Longueur de Planck  $[h G / c^3]^{1/2}$ 
  - de l'ordre de  $10^{-35}$  m



*Quand je connaissais peu de choses, j'avais beaucoup de certitudes. Plus j'apprends et moins je suis sûr.*

Principe d'incertitude

